LUCA VERCELLONI

Filosofia delle strutture

Firenze, La Nuova Italia, 1989
(Pubblicazioni della Facoltà di Lettere e Filosofia dell'Università degli Studi di Milano, 127)

PUBBLICAZIONI
DELLA FACOLTÀ DI LETTERE E FILOSOFIA
DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

CXXVII

SEZIONE A CURA
DEL DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA

14

LUCA VERCELLONI

FILOSOFIA
DELLE STRUTTURE

LA NUOVA ITALIA EDITRICE
FIRENZE

Vercelloni, Luca

Filosofia delle strutture. – (Pubblicazioni
della Facoltà di lettere e filosofia dell'Università
di Milano ; 127. Sezione a cura del dipartimento
di filosofia ; 14). –
ISBN 88-221-0707-1
1. Matematica – Aspetti filosofici I. Tit.
510.1

1ª edizione: aprile 1989

INDICE

AVVERTENZA DELL'AUTORE

Enunciamo un'ovvietà sostenendo che l'oggetto di cui la filosofia della scienza contemporanea quasi ossessivamente si occupa è costituito dalla filosofia della scienza stessa, dai suoi meandri, dai suoi sommovimenti, mentre il fatto scientifico sembra ormai rimosso dal suo orizzonte, trasfigurato com'è in una schematizzazione ormai mitica. Non che una simile attitudine debba necessariamente comportare un circolo vizioso, ché una qualche variante rispetto alle speculazioni anteriori dovrà pur motivare una nuova pubblicazione; certo è che il dato di fatto della scienza non pare piú meritevole d'osservazione, giacché – da quanto ci risulta – la filosofia della scienza non costituisce un fatto scientifico.

In filosofia della matematica – ammesso che sia lecito aspettarsi l'esistenza di una branca della letteratura degna di questo nome – la situazione, è vero, presenta alcune differenze: qui ci si interessa di logica, oppure, laconicamente, s i f a della logica. È forse un caso che Hilary Putnam in una recente enciclopedia passi in rassegna le ' filosofie della matematica ' in coda alla voce intitolata alla logica?

Ciò che le matematiche richiederebbero al filosofo è d'individuare la singolarità della loro apparizione in seno al sapere, non di forzarle all'interno di una visione del mondo (supposta in grado di esplicarne la natura) che ne determini una volta per tutte l' ' essenza ', eventualmente anche in anticipo sulla loro venuta, per rinvenirne successivamente la traccia (non è cosí che si va in cerca di quanto di dialettico popola le matematiche?). Altrove (cfr. I. Lakatos, *Proofs and refutations*) la matematica appare ridotta a banco di collaudo di una corrente epistemologica il cui contributo fondamentale si esplica in ricostruzioni ' razionali ' che, versioni caricaturali dei dialoghi platonici (con un *sense of humour* piuttosto greve), costituiscono vere e proprie f i n z i o n i e p i s t e m o l o g i c h e, nuovo ramo della fantascienza.

Eppure, la matematica possiede livelli di realtà alquanto sottili (sicuramente piú ricchi e articolati di quelli configurati dalle epistemologie), adotta procedimenti d'indagine suoi propri ed è inoltre portatrice di delimitazioni tematiche e criteri d'interesse che obbediscono ad un ritmo specifico: in quanto tale, essa espelle come caratterizzazione estrinseca ogni coercizione a schemi di pensiero che le sono estranei. Il compito d'accostarsi alla fisionomia che contraddistingue le matematiche esige dunque, in via preliminare, che ci si disponga all'ascolto di quanto esse hanno da dirci, nei modi a loro consoni.

Per parte nostra, abbiamo tentato di introdurci nell'edificio lungo il filo fornitoci dalle manifestazioni di un concetto (struttura matematica) che ha avuto la pretesa di riassumere la forma generale dell'oggetto matematico, seguendo il percorso descritto da alcuni episodi relativi alla sua apparizione e tematizzazione. La mancanza di letteratura specifica sull'argomento – in contrasto coi fiumi d'inchiostro dedicati all'accezione generica del termine (dalla filosofia alle ' scienze umane '), tanto ampia quanto vacua – ci è sembrata una motivazione sufficiente per questo lavoro.

Esso non nutre tuttavia ambizioni di completezza informativa: per esempio, non si fa menzione della teoria dei modelli in quanto disciplina autonoma, né sono prese in considerazione le matematiche applicate, dove il dualismo tra invenzione e scoperta delle strutture troverebbe forse la sua manifestazione piú appariscente. Pure, il nostro approccio alla matematica in senso stretto si limita, in fin dei conti, ad esaminare alcune versioni di un'esplicitazione concettuale e ad osservare in talune situazioni singolari delle strutture modalità attraverso le quali la materia matematica si raduna attorno a forme astratte, tralasciando tanto di reperire il luogo di elaborazione originaria delle singole strutture, quanto di avanzare giudizi di valore sulle teorie che le inquadrano, compiti, questi, di pertinenza piú dello storico e del matematico, come si dice oggi, ' militante '.

Nelle teorie che prenderemo in esame, assisteremo a descrizioni di mondi popolati, ciascuno a suo modo, dalle strutture: uno spettacolo, crediamo, degno di meraviglia. Se, secondo il detto platonico, non è che da questa disposizione d'animo che scaturisce la filosofia, il medesimo contegno sembra necessario per poter recepire il discorso matematico, θεωρία significando originariamente un modo particolare di vedere, una forma di contemplazione. Il rischio a cui la filosofia si espone è allora la difficoltà d'individuare una tematica propria al di là dell'impatto con teorie di cui riesce a formulare una semplice versione metaforica. Seppure la sola constatazione del paesaggio teorico che incontreremo paia suggerire considerazioni che – rapportate alsulla circostanza piú generale che le parole sulle teorie possano costituire qualcosa di piú dello scarno commento del matematico (che, pur adottando determinati criteri di giudizio, ne riduce inevitabilmente l'argomentazione a poche righe di circostanza, non parendogli chiaro – forse non a torto – fino a che punto il discorso, una volta dirozzato e approfondito, possa restare significativo), sull'eventualità, insomma, che una filosofia della matematica abbia veramente da esistere, non sapremmo in effetti dare risposta. L'esercizio occasionale con cui ci siamo cimentati è stato, assai piú modestamente, quello di commisurare lo spettacolo delle teorie che ci siamo trovati di fronte ai termini esemplari della filosofia della matematica a cui siamo stati educati.

Milano, 1980-1984.

Prologo

IPOTESI PER UNA TEORIA DELLE FORME

Universalia ante rem

Nel 1904 Maxime Bôcher s'interroga, sulle pagine di un'autorevole rivista [1], su che cosa la matematica sia, cercando evidentemente una qualche dichiarazione d'essenza, una ' definizione reale ' le cui versioni tradizionali — che vorrebbero la matematica scienza della quantità, ovvero del numero e dello spazio [2] — appaiono manifestamente inadeguate, la loro fallacia essendo palesata dalla mera constatazione di emergenza di nuove regioni teoriche: Bôcher cita geometria proiettiva, algebra della logica e teoria dei gruppi astratti come rappresentanti della refrattarietà all'alloggiamento in simili categorie. Si prospetta allora una doppia possibilità di riformulazione: da una parte si potranno avanzare congetture sulla natura delle entità con cui la matematica ha che fare, ricercare una loro caratterizzazione ontologica che oltrepassi le casistiche in grado di esibire soltanto semplici eterogeneità e che invece vada in cerca di « rassomiglianze recondite », soggiacenti alle varietà degli enti che le matematiche presentano, individuando in un « aspetto comune » in tal modo rinvenuto « l'unico reale oggetto dell'indagine matematica » [3]. Dall'altra, « abbandonando il tentativo di caratterizzare la matematica attraverso i suoi oggetti di studio, si potrà cercare nei metodi che le sono propri la

[1] Maxime Bôcher, *The fundamental conceptions and methods of mathematics*, « Bulletin of the American Mathematical Society », X (1904).

[2] Bôcher annota come tali concezioni riuscissero naturali anche a un Hamilton o a un De Morgan.

[3] Bôcher, *op. cit.*, p. 116.

sua caratteristica distintiva »[4]. Scelti a campione di questi paradigmi vengono citati Alfred Bray Kempe e Benjamin Peirce rispettivamente, mentre per la possibilità di combinare le due vedute Bôcher azzarda il nome di Russell.

Peirce, padre del filosofo Charles Sanders, accorderebbe dunque privilegio all'aspetto inferenziale della matematica. Ma il riferimento è ambiguo: si fonda su due concise pagine introduttive alla *Linear Associative Algebra* che Peirce divulgò in un'edizione semiclandestina del 1870 e che venne ristampata postuma undici anni dopo sull'« American Journal of Mathematics ». Anche Peirce lamenta l'inadeguatezza della vecchia definizione: i quaternioni sono per lui rivelatori del fatto che voler restringere la matematica alla ricerca quantitativa è ormai inammissibile. Di fronte al proliferare teorico di metà Ottocento la richiesta di un'unità che sopravviva allo smembrarsi dell'oggetto matematico tradizionale sembra per Peirce trovare soddisfazione in un unico luogo comune, quello della forma del ragionamento. Cosí troviamo in testa al trattato suddetto la definizione secondo cui « la matematica è la scienza che trae conclusioni necessarie »[5]. Ma in tal modo se ne allarga a dismisura la portata, e benché Peirce si preoccupi di distinguerla sia dalla scoperta delle leggi, sia dall'assetto assiomatico (dal momento che la matematica non è né induzione, né ipotesi), è tuttavia obbligato a rinvenirne tracce « in ogni indagine, tanto morale quanto fisica », seppure le proporzioni della sua presenza possano cambiare, e talvolta divenire evanescenti, tanto è elementare l'apparato deduttivo coinvolto, per esempio, « nella maggior parte delle branche della storia naturale ». La sfera della matematica è allora resa coestensiva con « l'intera ricerca dimostrativa, in modo da includere tutta la conoscenza passibile di insegnamento dogmatico »[6]. Nondimeno Peirce non sta abbozzando, come potrebbe sembrare, una forma di logicismo, perché l'identificazione tra matematica e logica (attraverso argomentazioni un po' oscure) viene da lui scartata. Una posizione particolare, in questo quadro alquanto vago, è riservata piuttosto all'algebra: al di là della solidale corrispondenza tra la mente umana e l'universo che essa abita — sorta di armonia prestabilita a cui Peirce sembra alludere in un capoverso della sua introduzione —, è

[4] *Ibid.*

[5] Benjamin Peirce, *Linear Associative Algebra*, « American Journal of Mathematics », IV (1881), p. 97.

[6] Tutte le citazioni da Peirce, *op. cit.*, pp. 97-98.

possibile far decantare dal ragionamento quanto compete al « puro lavoro intellettuale », svincolato dal contingente su cui si esercita. Questo processo di formalizzazione è appunto quello che conduce all'edificazione dell'algebra, matematica sviluppata su simboli affrancati da « rappresentazioni esterne o interpretazioni particolari » [7]. Tre componenti fondamentali concorrono a definire un'algebra: i suoi simboli e le relative leggi di combinazione, ovvero il linguaggio; « i metodi dell'uso dei simboli nel trarre le inferenze », il che costituisce la sua a r t e ; infine, apporto che non impedisce vita autonoma ai primi due, l'interpretazione dei simboli, o — come la chiama Peirce — l'applicazione scientifica dell'algebra [8].

Questo è, press'a poco, quanto si offre ai commenti di Bôcher. Ma l'importanza dello scritto di Peirce non consiste certamente nella genericità di questi cenni epistemologici, tanto piú che risulta mancante proprio il luogo preposto alla loro esplicazione matematica, ossia un eventuale volume o capitolo dedicato — in conformità alle divisioni del materiale di cui si è appena fatta menzione — all'arte dell'inferenza, giacché nessun libro fece seguito a quello intitolato al linguaggio dell'algebra, che costituisce la parte rimanente del lavoro di Peirce. Tuttavia, a dispetto del titolo, solo poche pagine trattano anche di questo argomento e neppure esse (intervenendo in funzione introduttiva) fanno l'interesse dello studio di Peirce, che risulta invece dal fatto che egli stia esplorando un tipo di struttura inedito, appunto l'algebra lineare associativa, situazione matematica di estrema generalità a cui sottostanno come casi particolari l'algebra ordinaria, gli spazi vettoriali e i quaternioni. Tra le righe di quest'indagine troveremmo spunti sull'assetto propriamente astratto delle algebre (degni senza dubbio d'interesse, per quanto non dal punto di vista dell'esposizione di Bôcher), ma non una parola in piú nell'intento di giustificare o precisare il motto secondo cui la matematica è deduzione. Pertanto, a meno di non ammettere in via pregiudiziale la liceità di definizioni taumaturgiche — il che ci riporterebbe, nella forma se non altro, a quelle tradizionali da cui tanto Peirce quanto Bôcher dichiarano di voler prendere le distanze — la disamina

[7] *Ibid.*

[8] Va notato che la natura di queste applicazioni è matematica, nel senso che esse forniscono ' modelli ' nel senso usuale (cfr. Peirce, *op. cit.*, *Addenda: On the Uses and Transformation of Linear Algebra,* in particolare pp. 216-217). È interessante anche il valore che Peirce rivendica alla sua teoria in quanto allestimento astratto.

critica di Bôcher è priva di un retroterra matematico adeguatamente sviluppato su cui esercitarsi, non ha anzi neppure un referente teorico a cui guardare: il suo bersaglio è un posto vuoto [9].

Dove invece si giunge in possesso del contrappeso teorico di una definizione verbale, delle modalità (o quanto meno di un riferimento bibliografico) in cui questa trovi una sua attuazione o motivazione matematica, è nel caso di Kempe. Ma conviene dapprima esaminare l'enunciazione del suo punto di vista come è presentato da Bôcher.

Suo assunto preliminare è, a parere di Bôcher, la concezione secondo cui « gli oggetti di ogni discussione matematica ... sono in ogni caso degli individui, eventualmente infiniti nel numero, ma pur sempre individui distinti » [10]. I costituenti minimali della matematica sono dunque i n s i e m i . Ammesso questo, incontriamo subito diversificazioni: individui accomunati in generi diversi possono comporre lo scenario di una particolare indagine. Cosí in geometria elementare avremo a fare con una promiscuità di oggetti, punti e linee rette per esempio, e questi potranno intrattenere tra loro relazioni di vario tipo, che connettono due o piú oggetti (come la collinearità), anche di genere differente (è il caso della relazione d'appartenenza, ' giacere su '). L'intervento delle relazioni è irrinunciabile: esse costituiscono la carpenteria del materiale insiemistico, altrimenti inservibile, conferendogli forma. Ma forniscono anche — e ciò entra in gioco a titolo fondamentale — tutta l'informazione necessaria al loro proposito: anche le operazioni su elementi possono esser trascritte senza complicazioni nello schema relazionale. Il linguaggio delle relazioni è pertanto il linguaggio esplicativo in matematica; giungiamo allora alla configurazione completa della concezione che lo privilegia: secondo quest'ottica in ogni ricerca matematica si è di fronte a una classe di oggetti congiunta a una classe di relazioni e « l'unico problema di cui ci si debba occupare è se raggruppamenti ordinati di tali oggetti soddisfano o non soddisfano le relazioni in questione » [11] (ed è tutto ciò che, d'ora in avanti, prenderà il nome di m a t e m a t i c a).

[9] Sicché Bôcher ha buon gioco ad avanzare riserve sulla vaghezza della definizione di Peirce e gli riesce ancor piú facile invocare l'ineliminabile relatività dei canoni di rigore dimostrativo. Ma dal momento che cita Boole, Peirce figlio, Schröder, Peano e Frege come prosecutori di questo tipo d'impostazione, non si vede perché non abbia assunto i lavori di questi autori per verificare l'attuazione di queste vedute, il che gli avrebbe fornito un materiale adeguato d'osservazione.

[10] Bôcher, *loc. cit.*, p. 125.

[11] *Ibid.*, p. 127.

Un aggregato consistente di una o piú classi di individui e di una classe di relazioni che li assumono come argomenti viene detto ' sistema matematico ': una corrispondenza biunivoca sugli oggetti di due sistemi, che salvaguardi le rispettive relazioni, li apparenta allora in un'equivalenza che in questa scelta prospettica diviene un'identificazione, dal momento che, rispetto a questo punto di vista, essi risultano indistinguibili, o — come viene anche detto — « semplicemente isomorfi ».

Sennonché questa definizione della matematica non pare del tutto soddisfacente, presentando un'escrescenza piuttosto imbarazzante. Infatti a questa veduta Bôcher può rimproverare — ragionevolmente, ci sembra — che da quanto detto non si evince ancora che la matematica sia una scienza deduttiva. In fin dei conti, osserva, il soddisfacimento di una relazione si potrebbe constatare empiricamente, e sarebbe lecito chiamare matematica anche « la determinazione attraverso metodi sperimentali di quali coppie di componenti chimici di elementi dati reagiscono l'uno sull'altro quando vengano miscelati secondo condizioni prescritte » [12]. Ma se a questa concezione concediamo l'aggiunta di un assetto assiomatico, essa si ricongiunge al punto di vista di Peirce: se infatti in matematica « non si fa uso dell'intuizione, ma soltanto di un certo numero di premesse esplicitamente formulate, non è necessario che si abbia alcuna idea attorno a quale sia la natura degli oggetti e delle relazioni che entrano in gioco in queste premesse » [13]. È in questo modo che le rette e i punti della geometria piana divengono semplicemente due generi distinti di entità, e ancora che la circostanza dell'individuazione di una retta da parte di due punti è resa da una relazione di cui non si precisa altro se non che per ogni coppia di oggetti del primo genere ne esiste uno e uno soltanto del secondo che sostiene con i primi due appunto tale relazione: tutto ciò « non esige alcuna intuizione specifica e nondimeno serve come base del ragionamento matematico nella stessa misura della piú familiare proposizione in cui vengono adottati i termini di linea e punto » [14]. Ciò facendo, saremo inoltre in grado di avanzare delle interpretazioni del sistema eventualmente molto distanti da quella che inizialmente tenevamo in considerazione. Questa attitudine nominalistica — conclude Bôcher — va diffondendosi sempre di piú: oggetti e relazioni vengono trattati come puri simboli ed è possibile enunciare la massima

[12] *Ibid.*, p. 129.
[13] *Ibid.*, p. 121.
[14] *Ibid.*, pp. 121-122.

congeniale a questa forma di pensiero asserendo che « se esistono oggetti qualsiansi del mondo fisico o di quello mentale con relazioni tra di loro soddisfacenti le condizioni imposte ai simboli, allora questi e questi altri fatti saranno veri al loro riguardo » [15].

Non ci dilunghiamo sulle riserve che Bôcher avanza anche a proposito di questa definizione riaggiustata, né — per il momento — sulla sua versione primitiva, precedente a questo emendamento. Ci importa piuttosto osservare che — stando alle parole di Bôcher — Kempe fornirebbe tutto il materiale occorrente per l'articolarsi di un linguaggio delle strutture, anzi sarebbe il rappresentante precoce di questo ' paradigma '. Ma si sbaglierebbe nel considerarlo un antesignano del ' pensiero strutturale ', per lo meno nella forma in cui questo è inteso ordinariamente ed è prefigurato da Bôcher. Nondimeno il resoconto di quest'ultimo suggerisce precisamente questa impressione: resta dunque da chiedersi su che cosa si fondi il giudizio di Bôcher. Innanzitutto ad esso fa davvero riscontro, come avevamo preannunciato, un sito teorico sufficientemente eloquente? Sí e no: in nota all'articolo di Bôcher vengono citati due scritti di Kempe del 1894 e 1890 che illustrano le sue idee in modo informale (« in a rather popular form »), mentre per dettagli piú tecnici si è rinviati ai riferimenti bibliografici contenuti in questi testi.

Non ci resta allora che percorrere questo itinerario a ritroso nel tempo, procedendo dall'essoterico all'esoterico: muovendo da un paradigma in forma divulgativa per giungere al suo disbrigo matematico. Constateremo in questo modo che la versione di Kempe fornita da Bôcher è infedele e, dopo aver accertato la circostanza di questa forzatura o contraffazione, dovremo tentare di sbrogliarne la trama, interrogandoci sulle sue possibilità d'instaurazione. Infine, verranno azzardate alcune considerazioni che ci riterremo motivati con sufficiente ragionevolezza a estrapolare da questa vicenda.

Il primo scritto che incontriamo, recante il perentorio titolo di *Mathematics* [16], è congegnato secondo uno schema per certi versi analogo a quello di Bôcher: anche qui, infatti, si prendono le mosse dalle concezioni tradizionali della matematica, dall'insoddisfazione rispetto alle definizioni a cui esse danno luogo. Sennonché in Kempe questa è argomentata in forma piú puntuale: non solo — ci vien detto — i matematici moderni

[15] *Ibid.*, p. 122.

[16] A. B. Kempe, *Mathematics*, « Proceedings of the London Mathematical Society », XXVI (1894).

non troverebbero in quelle definizioni una risposta soddisfacente alla domanda « cos'è la matematica? », ma è la natura stessa della risposta che deve essere chiarita, precedentemente ad ogni sua formulazione, dal momento che ammettere quest'ultima come esercizio di « un interesse puramente speculativo, con cui il matematico specialista non avrebbe nulla da spartire » [17] significa precluderle ogni esito positivo. Per altro, la constatazione che i matematici del passato hanno fatto compiere progressi alla loro scienza senza avvertire la necessità di una sua « definizione in compendio » non deve comportare per l'eternità l'irrilevanza ai fini del lavoro matematico di ogni tentativo di questo genere: infatti, da una ricerca che « dirigesse l'attenzione sulla natura degli elementi essenziali del pensiero matematico ed alle cause a cui deve essere attribuita la varietà delle proprietà matematiche, ci si potrebbe ragionevolmente attendere lo schiudersi di nuovi territori d'indagine e l'indicazione di linee di connessione tra argomenti matematici ritenuti finora fondamentalmente distinti » [18]. Per Kempe è dunque l'aggancio con la realtà matematica ad essere criterio discriminante: l'ispezione dovrà avvenire allora all'interno di questa realtà, non piú al di sopra, come accadeva nelle concezioni tradizionali, giacché queste non sembrano rivelare se non uno scollamento irrimediabile tra ordine speculativo e ordine matematico: i due paiono vivere ciascuno un'esistenza autonoma [19]. La definizione di cui si va cercando, per il momento, la semplice liceità, dovrà essere pertanto il risultato di un'indagine su fatti matematici che si risolva in un discorso matematico.

D'altra parte se si esamina il contenuto delle definizioni tradizionali, pur prescindendo dalla loro inutilizzabilità in sede di ragionamento matematico, esse ci appaiono mere « reliquie di un tempo remoto », perché se è ancora possibile far passare per « quantità » quelle cosiddette « immaginarie », solo « con un eccesso di immaginazione » si potrebbe concedere che « le relazioni tra giudizi o la teoria delle sostituzioni costituiscano lo studio della quantità o del numero, della figura o della po-

[17] *Ibid.*, p. 7.

[18] *Ibid.*

[19] La delimitazione delle rispettive competenze è a quel tempo tutt'altro che chiara: basti pensare al fatto che Dedekind (uno degli esponenti, cioè, del rinnovamento della concezione della matematica) fa intervenire nel 1887 una sorta di 'appercezione trascendentale' (la coscienza del proprio io) nel corso della dimostrazione di esistenza di un insieme infinito (*Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Viewig & Sohn, 1969, p. 14 [§ 66]).

sizione » [20]: tuttavia gli sviluppi recenti della matematica debbono esser considerati parte integrante di questa scienza, « truly mathematical » allo stesso titolo dei loro antenati. Incontriamo cosí un aspetto importante della posizione di Kempe: quello del ' riconoscimento ' delle nuove zone teoriche, emerse per germinazione spontanea nel corso del secolo e purtuttavia cosí diverse da quelle che le hanno precedute da richiedere un aggiornamento delle concezioni ' speculative ' che ospitavano le seconde ma alla cui presa le prime sfuggono. Se le procedure d'accettazione, compito eminentemente filologico, debbono prolungarsi in una nuova definizione, questa dovrà dunque essere esplicativa della natura delle nuove entità e chiarificatrice dell'intero edificio: il luogo comune del vecchio e del nuovo (un'essenza dunque) dovrà esprimere un sottofondo necessitante, in grado di rivelare i meccanismi secondo i quali i differenti territori sono architettati; i meccanismi, per lo meno, da cui questi si lascino addomesticare [21].

Occorre allora avvicinarsi alle novità che la matematica esibisce ed al loro riguardo la caratteristica preminente che Kempe rileva è quanto potremmo dire la loro conformità al discreto, di cui già Bôcher aveva fornito un resoconto. Kempe cita un giudizio a proposito di Klein, in cui s'individua questo scenario nella predominanza assunta dalle teorie che hanno a fare con ' quantità ' discrete (come la teoria dei gruppi), rispetto a quelle che trattano con quantità continue. Ma non è tanto uno slittamento d'interessi che Kempe ha di mira, quanto — come chiarisce subito dopo — l'assetto dell'oggetto matematico in genere: questo è uno spostamento di p r e c e d e n z e (il discreto prima del continuo) che descrive un evento di importanza strategica fondamentale, un evento che attraversa il secolo e di cui Kempe non è che un'oscura comparsa. Costui, molto piú semplicemente, si esprime asserendo che « i matematici hanno iniziato ad apprezzare il fatto — piuttosto ovvio una volta che venga notato — che essi in ogni indagine hanno a fare con un numero di

[20] Kempe, *op. cit.*, p. 7.

[21] A questa esigenza di chiarificazione Kempe aggiunge, forse con eccesso di ottimismo, una conseguenza di fecondità: l'apertura, come s'è detto, di nuovi campi d'interesse. Ciò rappresenta certo un atto di fede a proposito di un'attività dai contorni spaventosamente vaghi, semina alla cieca di una semente sconosciuta da cui ci si attende comunque un raccolto (del resto la stagione storica era propizia) e che può designare tanto il dislocamento di un'attitudine del fare matematica (la proposta di un nuovo ' stile '), quanto un ritorno chiarificatore sul terreno acquisito: ma tanto basta per delineare i requisiti che l'impresa doveva assolvere agli occhi di Kempe.

nozioni individuali (*individual conceptions*) »[22], per quanto queste siano suscettibili nei diversi casi di assumere i connotati piú disparati. Ciò di cui va dicendo Kempe è dunque la possibilità delle entità matematiche di erigersi ad insieme[23]: ma ciò non basta ad individuare l'argomento della matematica. Infatti « i diversi individui presi in considerazione non sono semplicemente mescolati assieme in un agglomerato caotico, ma intrattengono relazioni l'uno con l'altro, le quali li costringono a esibire una disposizione ordinata, a raggrupparsi in insiemi, a comporre quei differenti sistemi di individui che si presentano nello studio delle differenti branche della matematica »[24]. D'altra parte, i « moderni matematici tedeschi » hanno portato alla luce nuove connessioni tra queste branche, rivelando in tal modo apparentamenti reconditi tra soggetti in apparenza del tutto distinti. Ma se le divisioni tematiche tradizionalmente ammesse appaiono cosí del tutto arbitrarie, che cosa riunisce queste separazioni presunte, cosa mai è in grado di accomunare sotto la superficie quello che, al di sopra, è distinto? È una corrispondenza, risponde Kempe, che si mostra sussistere tra i due soggetti: « ad ogni cosa individuale, relazione o proprietà che sia di importanza matematica nell'un caso, corrisponderà una cosa individuale, una relazione o una proprietà nell'altro »

[22] Kempe, *op. cit.*, p. 8.

[23] Quella di Kempe è pertanto una testimonianza dell' anamorfosi dell'oggetto matematico in insieme. Resta vero che l'instaurarsi di una simile prospettiva si accompagna storicamente a vicende quanto mai pregnanti tra discreto e continuo: nasce ' ufficialmente ' in seno all'analisi in risposta a sue necessità interne con i lavori di Cantor sulle serie trigonometiche; in seguito ve ne istituisce il dominio attraverso l'aritmetizzazione dei reali nella sua versione piú appariscente delle ' successioni fondamentali ', per poi affrancarsene imponendo il suo governo altrove con la considerazione di insiemi ' astratti '. Ma è ancora all'interno della precedente configurazione (limite di successioni) che prende forma il sogno cantoriano di buon ordinamento del continuo, pretesa indubbiamente molto impegnativa ma con cui era naturale confrontarsi una volta che il meccanismo fosse stato messo in moto: se esaudita, essa ne avrebbe in effetti garantito la presa onnicomprensiva. L'approntamento di un'ottica insiemistica come sottofondo ontologico del discorso matematico, per quanto suggerita da indagini condotte sul campo che la proponevano come trattamento adeguato della questione in esame, resta in certo modo una scelta ' pregiudiziale ' nei confronti della rilevanza che assumerà in seguito come linguaggio unificante. Se si è disposti a concedere che in matematica (come altrove) vige il libero arbitrio, il momento di elezione di questo punto di vista (come ' scelta ' di fronte ad altre possibilità eventuali) non ci pare sia stato esaminato appropriatamente, al di là di un suo inserimento entro qualche irresistibile dispositivo teleologico come, per esempio, la lettura che ne dà Bourbaki. Ma tutto ciò esula dagli avvenimenti locali di cui stiamo stendendo il racconto.

[24] Kempe, *op. cit.*, p. 8.

e per quanto individui, relazioni e proprietà possano differire profondamente nelle due occorrenze « in mezzo a questa diversità permane qualcosa dei due sistemi che ne motiva la rassomiglianza e ci abilita a stabilire una corrispondenza tra loro. Questo qualcosa è noto come ' forma ' (*form*) » [25].

Risolvendosi in una mera sinonimia (forma = struttura), la versione ' popolare ' di Kempe sembrerebbe essere effettivamente foriera di una veduta ' strutturale ', giustificando in tal modo l'esposizione datane da Bôcher. Ma la concordanza riposa piú sulle intenzioni che altrove: fin qui sappiamo infatti che sul retroscena delle apparizioni diversificate delle entità matematiche agisce un meccanismo che — spogliati i sistemi dei loro rivestimenti ' avventizi ' — rivela invarianze e regolarità della loro configurazione ' oggettiva '. Di questo conio indifferente alla materia che impronta resterebbero tuttavia da precisare i modi d'instaurazione, esplicitando — per usare il motto di Kempe — quanto è « di importanza matematica »: quello che è lecito trascurare delle peculiarità di un sistema senza farlo decadere in una generalità amorfa. Ma le parole che Kempe spende in proposito non sembrano rispondenti alle nostre aspettative: ciò che per lui assicura il gioco delle essenze proviene infatti dalla semplice circostanza che « questo e quell'individuo, questa e quella pluralità differiscono, mentre questa e quest'altra no » [26]. C'è dunque da chiedersi come Bôcher pensi di render conto di tutto ciò. Dall'estrema vaghezza della formula forse ne sospetta la natura metaforica: del resto, come distinguere tra le righe della divulgazione quello che è metafora da quello che non lo è? Oppure si ritiene autorizzato ad omettere dalla sua parafrasi questo dettaglio, considerandolo irrilevante, o al contrario pensa che, tutto sommato, potrebbe anche starci. Comunque stiano le cose, Kempe ' precisa ' subito dopo che se delle particolarità degli individui e delle relazioni che concorrono a definire i campi d'indagine della matematica conserviamo precisamente quanto si è detto, non per questo ci ritroveremmo ridotti a manipolare « un cumulo di ossa secche »: la forma, infatti, sopravvive a questa spoliazione. In che cosa poi questa consista, è detto poco sotto: « gli individui simili e dissimili e le pluralità contenute entro una pluralità piú estesa devono essere distribuiti in qualche modo all'interno dell'intera massa di individui che compongono questa piú ampia pluralità. Ed il modo in cui questa distribu-

[25] *Ibid.*, p. 9.
[26] *Ibid.*

zione è effettuata fornisce a quest'ultima una forma caratteristica, che può essere la stessa o diffcrire, nel caso di due pluralità con lo stesso numero di individui »[27].

Sennonché neppure gli esempi che Kempe arreca sembrano decisivi per diradare la metafora: ci viene detto che i vertici di un tetraedro regolare non differiscono l'uno dall'altro sotto nessun rispetto e che l'identica osservazione vale per le coppie che individuano gli spigoli del solido, come per le triadi che corrispondono alle sue facce. Se si confronta questa situazione con quella che si riscontra nel caso dei vertici di un quadrato, avremo che se entra in gioco lo stesso numero di elementi e se essi « non differiscono sotto nessun rispetto l'uno dall'altro », come nel caso precedente, tuttavia la situazione cambia se si considerano le loro coppie, perché in questo caso le coppie che individuano i lati della figura sono distinte da quelle che rappresentano le diagonali: i due ' sistemi ' di entità sono dunque portatori di forme differenti. Incontriamo invece un'identità di forma nel caso seguente: da una parte si considerano i ventiquattro triangoli che si ottengono dalle facce del tetraedro regolare congiugendo i vertici di ciascuna di esse con il punto medio dello spigolo a cui il vertice in questione non appartiene. Abbiamo in tal modo due insiemi consistenti di dodici triangoli sovrapponibili; abolendo questa distinzione (ammettendo cioè la possibilità di ribaltare i triangoli) si ottiene un insieme di ventiquattro triangoli ' simili ', ognuno dei quali può essere univocamente individuato da una quadrupla ordinata comprendente i quattro punti del tetraedro: sicché il sistema può essere espresso attraverso l'insieme delle permutazioni dei suoi elementi. « Differente nel carattere » ma portatore della stessa forma è il sistema che si ottiene considerando quattro variabili indipendenti x_1, x_2, x_3, x_4, e le funzioni del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ che esse formano con quattro diversi coefficienti a, b, c, d, ottenute attraverso le possibili permutazioni delle variabili. Se non nutriamo dubbi sul fatto che nei due casi si incontri una stessa ' situazione ' (il gruppo simmetrico di sostituzioni su quattro lettere), resta per altro da intendersi su che cosa Kempe voglia esprimere attraverso essa. Ma nel testo ci viene detto semplicemente che « la forma fornisce un campo illimitato di indagini matematiche », ed anzi « il suo studio è coestensivo con la matematica stessa », dal momento che « tra due soggetti che hanno la stessa forma è possibile stabilire un'esatta corrispondenza tra le loro proprietà

[27] *Ibid.*, p. 10.

matematiche, per quanto essi possano differire profondamente sotto altri punti di vista » e che « queste loro altre caratteristiche [. . .], matematicamente parlando, sono del tutto irrilevanti » [28].

Il secondo testo citato da Bôcher [29] concerne ancora le essenze ed i rivestimenti sotto cui esse amano celarsi. Alla domanda che ne motiva retoricamente lo svolgimento (« su che cosa si esercita il pensiero esatto? ») si risponde quello che già immaginiamo: il suo contenuto essenziale consiste nello studio di forme, delle quali viene data la seguente definizione: « ogni sistema di entità possiede una forma definita dovuta al numero delle sue entità componenti ed al modo in cui la distinzione e l'indistinzione di entità, collezioni di entità e loro aspetti sono distribuite entro il sistema » [30]. Tuttavia la comunanza di forma che viene qui esternata è piuttosto debole, e non può essere ragionevolmente addotta a esemplare di ' isomorfismo ' in nessun senso: del resto, lo stesso Kempe si esime dal parlare di una s t e s s a forma posseduta simultaneamente dai due soggetti considerati. Il primo di questi consiste nella « teoria geometrica dei punti », dei quali Kempe si affretta a rilevare — secondo un procedimento a cui cominciamo ad avvezzarci — la completa omogeneità: « tutto quello che può esser detto sui punti come entità individuali è che essi sono tutti esattamente uguali l'uno rispetto all'altro; nessuna osservazione può esser fatta a proposito di uno di essi che non possa essere ripetuta a proposito di ciascuno degli altri » [31].

[28] *Ibid.*, p. 13. Quanto all'« universale linguaggio dei simboli che, a ragione, è stato detto da Sylvester essere la matematica sotto altro nome, ossia l'algebra » (*ibid.*), esso — a parere di Kempe — effettua un'operazione perfettamente analoga a quella appena descritta: separa, cioè, i fatti matematici dalle accidentalità in cui si presentano per riproporre « l'elemento soggiacente essenziale — la forma — in una foggia piú confacente allo scopo dell'indagine, ovvero quella composta di formule e simboli algebrici » (*ibid.*); allo stesso modo si è passati, qui, dai vertici del tetraedro alla loro traduzione ' letterale '. « Sarebbe interessante — aggiunge (p. 14) — analizzare i differenti modi di rappresentazione algebrica per mostrare come essi rappresentino tutti semplicemente delle forme »: sulla possibilità di questa ' dimostrazione ' — afferma poi — non dovrebbero esservi dubbi.

La definizione ' provvisoria ' che Kempe propone per la matematica è allora la seguente (p. 15): « La matematica è la scienza che indaga sulle caratteristiche di ogni argomento del pensiero dovute alla concezione per cui esso consiste in un numero di individui differenti e no ».

[29] A. B. Kempe, *The Subject-Matter of Exact Thought*, « Nature », XLIII (1890).

[30] *Ibid.*, p. 162. Sul termine ' aspetto ' cfr. la successiva nota 32.

[31] *Ibid.*, p. 157.

Neppure le coppie di punti sembrano in grado di esibire differenze: occorre passare alle considerazioni delle triadi per veder apparire le prime distinzioni. In questo caso la divisione si compie tra triadi ' collineari e no ': questa dicotomia è di « importanza fondamentale » per quanto riguarda le proprietà proiettive della geometria, alle quali lo studio di quelle ' metriche ' può essere ricondotto come caso particolare. Tuttavia, aggiunge Kempe, non sono la collinearità o la non-collinearità a costituire l'argomento di considerazione del geometra: è un « rivestimento accidentale » quello che vuole una triade collineare di punti giacente su una stessa retta. Quello che è realmente essenziale è invece che le triadi concepibili appartengano a due specie distinte e che la loro distinzione riposi su leggi che regolano la loro distribuzione in seno al sistema. Enuncia allora un insieme di sei assiomi al riguardo [32].

[32] Essi suonano cosí:

1. (abp) e $(cdp) \rightarrow \exists\, q: (aqd)$ e (bqc);
2. (abp) e $(cdp) \rightarrow \exists\, r: (adr)$ e (brc);
3. (acb) e $a \sim b \rightarrow a \sim c \sim b$;
4. $a \sim b \rightarrow \forall\, c\ (abc)$ e (bac);
5. Se a, b, c formano una triade collineare, e cosí pure b, c, d, allora anche a, c, d e a, b, d ne formano una;
6. Nessun punto è assente dal sistema se la sua presenza è coerente con le precedenti leggi;

dove si intenda con $(a\,b\,c)$ una triade collineare in cui b è il ' medio ', a, c gli ' estremi ' e $(a\,b\,c) \leftrightarrow (c\,b\,a)$ (la relazione è simmetrica rispetto agli estremi); l'equivalenza tra due elementi $(a \sim b)$ sta a significare che per ogni relazione che uno di essi sostiene con una determinata collezione di elementi, la stessa relazione è sostenuta dall'altro con la stessa collezione di elementi, e viceversa, il che differisce pertanto dal dichiararne l' ' indistinguibilità '.

Kempe afferma che la distribuzione delle triadi in conformità alle leggi enunciate comporta « un'analoga regolarità di distribuzione di collezioni distinte e indistinte di un qualsiasi numero di punti » (p. 158). Accanto a queste collezioni considera i loro ' aspetti ': con questo termine, ci si dice, si intenderà « l'apparire di una cosa sotto determinate condizioni. Se queste vengono alterate, avremo differenti aspetti della cosa » (*ibid.*). Matematicamente tutto ciò si traduce in successioni ordinate dei punti della collezione: se per esempio questa consiste nella coppia a, b allora $a\,b$ e $b\,a$ rappresentano due differenti ' aspetti ' della coppia (i soli possibili, per altro). Ogni collezione possiede cosí un certo numero di aspetti a cui si giunge combinando i punti in modo da ottenere ogni loro possibile ordinamento: di questa molteplicità di aspetti, alcuni differiscono da certi altri ma non tra loro e « questi aspetti distinti e indistinti sono regolarmente distribuiti entro il sistema », concordemente alla distribuzione delle triadi collineari e no secondo le leggi date. A causa di questa distribuzione regolare di collezioni ed aspetti, un sistema è portatore di una ' forma ' specifica, la quale rappresenta l'unico reale argomento essenziale (*subject-matter*) del pensiero esatto nello studio di un sistema di punti (cfr. p. 159).

L'altro argomento preso in esame è « la teoria logica delle proposizioni »: anch'essa, spogliata delle credenze che solitamente l'accompagnano, si riduce allo studio di un sistema di entità individuali, ' indistinguibili ' l'una dall'altra. Dal momento che due proposizioni possono implicarsi o escludersi a vicenda, o una può implicare l'altra e via dicendo, sembrerebbe che le coppie di proposizioni siano portatrici di ' differenze ': ma ci viene detto che questa è solo un'impressione, dovuta al riferimento implicito al vero e al falso, che sono classi d'equivalenza di certe entità del sistema. Occorre invece riferirsi alle triadi — come nel caso precedente — perché delle differenze possano manifestarsi: cosí le triadi si suddividono in ' lineari ' e no, le prime essendo individuate da un insieme di cinque assiomi « che ne regola la distribuzione entro il sistema ». È precisamente tale distribuzione che « definisce completamente il sistema come quello in possesso di tutte le proprietà di cui realmente si occupa il logico quando studia le relazioni tra proposizioni » [33].

Che cosa motiva allora l'esame in parallelo delle due teorie? Semplicemente la circostanza per cui i due sistemi assiomatici coincidono ad eccezione di un assioma, che compare nel primo caso (e che asserisce che due rette possono intersecarsi solo una volta) [34] ed è omesso nel secondo. Non si ha pertanto un'identità di forma tra i due sistemi e neppure se ne azzarda un'inclusione in termini di « sottosistema »: l'apparentamento che Kempe ne ricava consiste semplicemente nell'osservazione che « se in geometria questa restrizione venisse rimossa, lo studio dei punti coinciderebbe — in tutto ciò che è essenziale — con quello delle proposizioni » [35].

Kempe non si dilunga ulteriormente sulle connessioni intercorrenti tra i due sistemi, se non per constatarne un medesimo stile di trattazione, se cosí si può dire: una pulizia dai sedimenti culturali che li ricoprono, a cui sarebbe demandata — attraverso meccanismi ancora oscuri — l'esibizione delle rispettive ' forme '. Ed a questo tipo di presentazione, aggiunge Kempe, è possibile sottoporre rette, curve, superficie,

[33] *Ibid.*, p. 160. Anche in questo caso Kempe afferma che « la distribuzione uniforme di coppie e triadi di proposizioni comporta una simile regolarità di distribuzione di collezioni distinte e indistinte di un piú ampio numero di proposizioni ». Tutto ciò, unitamente alle considerazioni sugli aspetti, comporta che il sistema possieda una ' forma ' e debba le sue proprietà ad essa « precisamente allo stesso modo in cui ciò accade nel caso di un sistema di punti ».

[34] Si tratta dell'assioma 5 dato nella nota 32.

[35] *Ibid.*, p. 161.

trattandosi in ogni caso di individui (indistinti tra loro e distinti da altri, come un piano lo è rispetto a una retta o ad un punto), che debbono le loro proprietà alle relazioni che sostengono l'uno con l'altro ed a quelle che sostengono con i punti [36]. Ma anche vettori, quaternioni, matrici « e perfino algebre » sono passibili di un analogo trattamento: anche in questi casi si ha a fare con semplici entità le cui proprietà derivano dalle relazioni che esse intrattengono tra loro e con altre entità, e « tutto ciò che è essenziale in queste relazioni dipende semplicemente dal fatto che certi individui, coppie, triadi ecc., e i loro aspetti, sono distinti l'uno dall'altro, mentre certi altri sono indistinti, ed hanno una distribuzione specifica » [37]. Con ciò si ha anche una ' forma ' ed è soltanto questa ad entrare in considerazione, se ci si libera dalle abitudini accidentali che il pensiero ha contratto nel modo di concepire le differenti entità matematiche [38].

In un articolo dello stesso anno [39] (di cui quello che abbiamo appena esaminato costituisce la versione divulgativa), Kempe si sofferma piú diffusamente sugli stessi argomenti, chiarendone i meccanismi costitutivi ed elargendo qualche altra considerazione sulle ' forme '. Si tratta qui di un sistema di entità ' indistinguibili ' l'una dall'altra, « all exactly alike », nel senso che se una di esse sostiene una certa relazione con una determinata collezione delle restanti, ogni altra entità del sistema sosterrà la medesima relazione con una collezione di altre entità, ' indistinta ' dalla precedente: qualcosa di piú impegnativo, dunque, della semplice assunzione di un insieme (privo di struttura). Sul sistema, che

[36] Kempe precisa tuttavia che la circostanza per cui un punto ' giace su una curva ' non rappresenta altro che un rivestimento accidentale di quanto realmente conta, cioè che « le coppie di entità consistenti in una curva ed un punto che giace su di essa sono distinte da quelle per cui questo fatto non si verifica e che i due tipi di coppie sono distribuiti all'interno dell'intero sistema di punti e curve in modo definito » (*ibid.*).

[37] *Ibid.*, p. 162.

[38] A prescindere dagli accenni (ancora tutt'altro che rassicuranti) alle questioni di ' forma ', ai modi in cui questa s'instaura o si riconosce, il tutto restando circondato dalla vaghezza piú esasperante, sembrerebbe che Kempe sottolinei in questo caso l'assetto assiomatico di una teoria (la forma procedendo ' di conserva '). Un sistema d'assiomi determinerebbe implicitamente le entità di cui tratta ' regolandone la distribuzione ', come dice Kempe: il che consente di stimare ogni altra considerazione un rivestimento accidentale o ' agente di disturbo '.

[39] A. B. Kempe, *On the Relation between the Logical Theory of Classes and the Geometrical Theory of Points*, « Proceedings of the London Mathematical Society », XXI (1890).

Kempe chiama s i s t e m a d i b a s e , viene definita una relazione ternaria (' linearità '), attraverso gli assiomi:

0. $(abc) \leftrightarrow (cba)$
1. (abp) e $(cpd) \rightarrow \exists\ q : (aqd)$ e (bqc)
2. (apb) e $(cdp) \rightarrow \exists\ q : (adq)$ e (bqc)
3. (acb) e $a = b \rightarrow a = c = b$
4. $\forall c\ \ a = b \rightarrow (abc)$ e (bac)
5. « Nessuna entità coerentemente (*consistently*) ammissibile nel sistema ne è assente » (l e g g e d i c o n t i n u i t à).

Quanto a quest'ultima « legge » — di cui abbiamo già incontrato una versione analoga nell'articolo precedente [40] — essa sembrerebbe esprimere un'esigenza simile a quella hilbertiana di non estensibilità della retta nell'assiomatizzazione della geometria (assioma di completezza). Ma la sua formulazione resta vaga: è una sorta di completezza che si ha di mira (ogni possibile esiste, ci si dice), ma per quanto concerne il proseguimento dell'articolo Kempe richiederà a questo assioma semplicemente di assicurare la chiusura delle operazioni che verrà definendo, per esprimersi solo incidentalmente sulla cardinalità che esso impone ai suoi ' modelli '. In guisa di dilucidazione si adduce ad esempio la postulazione d'esistenza di un ' medio ' per ogni coppia di ' estremi ', in modo che la loro triade risulti ' lineare ', o ancora che per ogni tre entità del sistema a, b, c ne esista una quarta x che formi con esse le triadi lineari (axb), (axc), (bxc) [41]. Per la posizione che assume rispetto alle prime tre componenti, l'elemento x viene detto loro ' risultante simmetrica ' ed una volta accordatane l'esistenza, la relazione che esso intrattiene con i precedenti elementi definisce a tutti gli effetti un'operazione ternaria $\{a, b, c\} = x$, la cui univocità è conseguenza degli assiomi. Attraverso ' necessità ' analoghe, Kempe deriva l'esistenza di un ' inverso ' z' per ogni elemento z del sistema. Le proprietà che contraddistinguono gli ' inversi ' sono la loro univocità rispetto ad un elemento dato, la simmetria della relazione che intrattengono con esso ed infine che per ogni elemento a del sistema si ha $(z\,a\,z')$.

[40] Cfr. nota 32.

[41] In effetti l'omissione dell'elemento x significherebbe supporre ' assente ' dal sistema ciò che potrebbe non esserlo, contravvenendo alla ' legge di continuità '. Quanto alla prova di ' consistenza ' di simili postulazioni di esistenza, nessun criterio viene enunciato, né le interpretazioni di cui il sistema d'assiomi verrà mostrato suscettibile paiono essere addotte in tal senso.

A partire da questo materiale Kempe appronta la costruzione di un' ' algebra ': si inizia con l'introdurre nuove operazioni (binarie) attraverso l'assunzione di una coppia di inversi z, z', come parametri delle ' risultanti simmetriche ' che essi formano con ogni altra coppia di elementi del sistema [42]. Abbiamo in tal modo

$$\{z, a, b\} =: \quad a \cdot b \qquad\qquad \{z', a, b\} =: \quad a + b$$

Le entità z e z' divengono cosí le ' costanti ' dell'algebra che si deriva dal sistema delle triadi: si dimostra commutatività ed associatività di entrambe le operazioni e la distributività dell'una rispetto all'altra. Dalla definizione di ' risultante simmetrica ' risulta inoltre che, per ogni elemento a,

$$a \cdot a = a = a + a \qquad\qquad a \cdot a = z \qquad\qquad a + z' = a$$

Si ha dunque a fare con un'algebra di Boole. Entro la nuova ambientazione algebrica è allora possibile riscrivere le relazioni primitive: dal momento che nel sistema di partenza avevamo $(abc) \leftrightarrow \{a,b,c\} = b$, possiamo reinterpretare algebricamente le triadi lineari in cui entrano in gioco le ' costanti ' in termini di operazioni. In tal modo (abz) viene espresso da $a \cdot b = b$ (che si abbrevierà d'ora in avanti con $a > b$) [43]. Asserire allora che fra tre elementi qualsiasi a, b, c sussiste la relazione di linearità (abc) diviene nell'algebra porre le condizioni

$$a + c > b > a \cdot c$$

mentre la loro risultante simmetrica $\{a, b, c\}$ è resa da

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$$

o, equivalentemente, da

$$(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a)$$

Assumendo ' valida ' la situazione algebrica (nel senso di considerare le sue proprietà come assiomi che la definiscono) ed apponendovi la ' legge di continuità ', Kempe passa a dimostrare la validità degli assiomi del sistema di base, che divengono in questo caso conseguenze di quelli

[42] Questa scelta è arbitraria, nel senso che ogni coppia di inversi (essendo assunti come parametri) può svolgere la medesima funzione. Cfr. la successiva nota 85.

[43] Essa costituisce in effetti una relazione d'ordine.

dell'algebra. Che cosa ne ricava Kempe? Che passando alle ' interpretazioni ' dell'algebra (classi, enunciati), dal momento che essa « è in grado di rappresentare tutte le relazioni logiche intercorrenti tra classi » (o tra enunciati), nessun'altra legge è necessaria a questo scopo oltre a quelle che definiscono il sistema di base; pertanto « tutto ciò che è essenziale nel sistema logico delle classi » — o in quello degli enunciati — « per quanto riguarda la teoria logica, è che esso è precisamente della stessa forma del sistema di base » [44]. Quanto Kempe ha rilevato è dunque l'equivalenza tra due specie di strutture: ha stabilito un'interpretazione sintattica tra le due teorie in grado di equipararle, i teoremi dell'una sono quelli dell'altra. La ' forma ' ne rappresenterebbe in qualche modo l'invariante: è dunque la capacità espressiva dei due sistemi assiomatici, la loro portata deduttiva indifferente al ' sistema di riferimento ' che si adotta, o che altro? La situazione sembra rimanere piuttosto nebulosa [45].

Ciò nonostante, l'indicazione ' programmatica ' che Kempe ne ricava (che possiamo leggere a conclusione del precedente scritto, che di quest'ultimo rappresenta la promulgazione epistemologica) è che le sole differenze che è giustificato considerare in matematica sono quelle provenienti dalla ' forma ' dei sistemi, non ' le innecessarie e immotivate suddivisioni in branche ' che ancora vengono tramandate. Ma questa presa di posizione comporta secondo Kempe che nello studio di un sistema particolare si tenga conto della sua posizione di fronte agli altri possibili: tutto ciò sembra esigere un loro ' studio comparato ', un'indagine sulle proprietà comuni a tutti e sulle possibilità di variazione di cui le forme sono capaci.

[44] Kempe, *op. cit.*, p. 171.

[45] Quanto all'effetto geometrico del sistema, esso consiste nella « considerazione di certi insiemi di entità che possono essere selezionati da quelli che compongono il sistema di base ». Tali *loci* vengono individuati dal seguente assioma aggiuntivo: se a, b, c e b, q, p formano una triade lineare, ma non la formano a, b, q, allora $p = q$. Interpretando la relazione di linearità in termini di collinearità tra tre punti (il ' medio ' giacente tra gli ' estremi ' sulla retta che essi determinano), la validità degli assiomi viene mostrata; quello supplementare assicura che due rette non possono avere piú di un punto in comune. Che il sistema basti ad inglobare la geometria descrittiva per Kempe è dato dal fatto che le proprietà di cui questa si occupa « possono venir definite da asserzioni attorno a certe triadi collineari di punti ». Pertanto « tutto ciò che è necessario in un sistema di punti perché esso possa possedere quelle proprietà che vengono considerate in geometria descrittiva, è che le triadi collineari di questi punti siano distribuite nel sistema in una maniera che gli è distintiva. Questo modo di distribuzione è completamente definito dalle leggi che abbiamo considerato » (p. 179).

Si rende dunque necessario un rinvio al testo che ne tratta: un esame dello scenario descritto da una teoria generale delle forme.

Quello che Kempe allestisce in *A Memoir on the Theory of Mathematical Form*[46] è un discorso sull'eguaglianza e la diseguaglianza, una dottrina degli indiscernibili. Ritroviamo anche in questo testo il vocabolario che abbiamo già avuto modo di esaminare. Ma prima di avanzare decifrazioni di questo crittogramma, ci conviene acclimatarci con la sua terminologia; dal momento che dalla nozione di ' indiscernibilità ' (dalla situazione strategica che questa esprime) dobbiamo attenderci la rivelazione di ' forme ', tanto vale assumere per il momento questa relazione come nozione primitiva, per rintracciarne successivamente le modalità d'instaurazione. Questa lettura, del resto, non fa che seguire l'andamento testuale, lo stile del cui discorso sembra per lo piú ' descrittivo ', solo frammentariamente deduttivo. Quanto all'indiscernibilità non se ne dà propriamente una definizione: ' nozione comune ', se si vuole, essa esprime l'omogeneità che sussiste in seno a un sistema di individui. Retrospettivamente possiamo considerarla una relazione d'equivalenza tra elementi, coppie, triadi e in generale n-adi[47] di elementi di un sistema. Ma dire ' sistema ' significa già fare uso di una nozione derivata, perché il suo principio d'individuazione consiste nel fatto che i suoi elementi si distinguono dai restanti, in seno ad una collezione piú ampia di individui che comprende il sistema. Stagliato sul residuo dell'universo del discorso, un sistema ne risalta dunque tramite una distinzione (la cui natura non viene specificata): è questa condizione — e non l'eventualità, non essenziale, che i suoi elementi siano fra loro indiscernibili — che gli conferisce un contegno unitario. Con ' collezione ' dovremo invece intendere un insieme di entità che non forma necessariamente un sistema, per quanto ogni collezione (al pari di ogni sistema) sia portatrice di una forma ' definita '. Infine, assumendo un certo numero di entità come sostrato di una particolare indagine, avremo a fare con un sistema, il loro risaltare, o contrassegno distintivo, provenendo dalla circostanza che quelle entità sono le sole ad essere considerate. Ne segue che « ogni

[46] « Philosophical Transactions of the Royal Society », CLXXVII (1886).

[47] *Nel senso di suoi sottoinsiemi ordinati.* Fin qui Kempe non considera le n-adi come elementi del cartesiano corrispondente, con la possibilità di ripetere, cioè, uno stesso elemento su differenti coordinate. Salvo avviso contrario è dunque quest'accezione del termine che sottintenderemo.

collezione è componente di un sistema »[48]: in altre parole è un suo sottoinsieme arbitrario.

Per quanto concerne le ' forme ', esse sono dovute alla concomitanza di due fattori: la cardinalità della collezione (o del sistema) e la distribuzione delle sue componenti indiscernibili. Guardando all'interno di una collezione o di un sistema, diremo singoli quelli i cui elementi risultano tutti indistinguibili tra loro, multipli gli altri[49]: tale sembra essere la discriminazione preliminare che si impone.

Kempe passa quindi alle ' rappresentazioni grafiche ' dei sistemi, che consistono nella loro traduzione in grafi: i vertici del grafo rappresenteranno gli elementi del sistema, e nel caso di sistemi multipli si potranno indicare le diverse collezioni che lo compongono attraverso una differente colorazione o grafia o apposizione di indici per i rispettivi vertici. Agli spigoli è demandata l'esibizione delle differenze e delle indiscernibilità interne al sistema: potranno essere orientati, per indicare la differenza della coppia (a, b) dalla sua inversa (b, a), oppure anch'essi di differente colorazione o grafia. In generale una coppia di vertici connessa da un certo tipo di spigolo, si differenzia dalle coppie non collegate in modo analogo. Con ciò, tuttavia, avremo una rappresentazione soddisfacente dei sistemi la cui forma poggia sulle sole differenze tra elementi e coppie di elementi: nel caso in cui entri in gioco un riferimento necessario alle distinzioni tra triadi, tetradi e cosí via, occorrerà — dice Kempe — escogitare altri stratagemmi. Ma anche nel caso di distinzioni tra coppie, non si dà una procedura univoca per i grafi preposti ad esprimerle: grafi con un numero differente di spigoli o di tipi di spigoli possono rappresentare lo stesso sistema ed avremo in tal modo casi di sovrabbondanza di dati (alcuni spigoli sono superflui) ed altri in cui configurazioni distinte si equivalgono. Ma sui requisiti minimali per rappresentazioni di questo tipo, o sui criteri di equivalenza tra grafi, Kempe fornisce solo indicazioni generiche: il luogo rivelatore delle forme, ancora una volta, sembra destinato a rimanere vacante.

Con il paragrafo successivo, tuttavia, l'intrico si sbroglia: è con l'esame degli ' aspetti ' delle collezioni che il discorso di Kempe si chiarisce[50]. Se due collezioni di entità sono indistinguibili, ci si dice, ciò

[48] Kempe, *op. cit.*, p. 6. Ciò non comporta tuttavia che una collezione non possa a sua volta contenere un sistema.

[49] Per esempio risulteranno ' doppi ' quei sistemi (o quelle collezioni) costituiti da due sistemi (o collezioni) singoli disgiunti.

[50] Sugli ' aspetti ' Kempe ritornerà in una nota dell'anno successivo (*Note to*

significa che esiste tra loro una corrispondenza biunivoca che invia le componenti dell'una nei rispettivi ' indiscernibili ' della seconda, in modo che due elementi omologhi verranno ad occupare la medesima ' posizione relativa ' in seno alle due collezioni poste in corrispondenza. Ora la corrispondenza può anche essere interna alla collezione: in questo caso avremo una ridistribuzione degli elementi in modo che i due ' aspetti ' della collezione (descritti dalla corrispondenza) risultino indistinguibili. L'indistinguibilità è rilevata in conformità a un criterio di natura imprecisata (è il livello dell'astrazione, se si vuole, a cui ci si arresta), ma nel caso di una rappresentazione in grafo la scelta prospettica si precisa: una corrispondenza del grafo in se stesso esprimerà due suoi aspetti indistinguibili se ne viene preservata la configurazione, ovvero — per usare un termine che non è di Kempe — se la corrispondenza conserva la struttura del grafo. Indiscernibilità significa pertanto corrispondenza isomorfa (o automorfa)[51]. L'adozione del termine ' aspetto ' si rischiara ulteriormente se passiamo alle ' rappresentazioni letterali ' di un sistema: in tal caso un'autocorrispondenza di una collezione di n elementi si può esprimere attraverso una loro permutazione ed avremo in tal modo una sostituzione da un allineamento degli elementi della collezione (è precisamente questo che si dirà ' aspetto ') ad un altro omologo (un ' aspetto ', dunque, indistinguibile dal precedente). La scelta dell'allineamento iniziale è evidentemente arbitraria, mentre è la sostituzione che conta: ma coinvolgere gli aspetti nella sua considerazione significa ottenere una veduta d'insieme su tutte le distinzioni possibili all'interno di un sistema, perché se questo è costituito da n elementi, presenterà $n!$ aspetti, ciascuno dei quali indistinguibile da alcuni

a Memoir on the Theory of Mathematical Form, « Proceedings of the Royal Society », XLII, 1887), per chiarire che si tratta semplicemente di far corrispondere un numero intero ad ogni elemento della collezione in esame: ad ogni ordinamento corrisponderà dunque un ' aspetto '. Quanto alla scelta del termine in questione, Kempe si esprime come segue: « Quando, considerando una collezione di unità, attribuiamo differenti gradi di preminenza nel nostro pensiero a differenti unità della collezione, noi stiamo mentalmente apponendo contrassegni distintivi a quelle unità e otteniamo un particolare ' aspetto ' della collezione rispetto alla nostra immaginazione » (p. 194).

[51] In realtà, come verrà chiarito piú avanti, l'introduzione del concetto di isomorfismo (o automorfismo) è impropria in questo contesto: esso presuppone infatti il possesso preliminare di una ' forma ' che deve essere conservata dalla corrispondenza. Ma Kempe non sta tematizzando la nozione di struttura: sicché né il termine di isomorfismo, né quello di automorfismo compaiono nel suo testo.

altri e distinto dai restanti. A questo punto il gioco è fatto: se studiare un sistema significa studiare la distribuzione dei suoi aspetti, basterà scegliere un allineamento come sistema di riferimento ed elencare le sue permutazioni ' indistinguibili '. È quanto Kempe chiama ' rappresentazione tabulare ' di un sistema, consistente (per quanto Kempe non lo dichiari in modo esplicito)[52] nel gruppo di sostituzioni che individua i suoi ' automorfismi '. È dunque il gruppo delle sostituzioni ' caratteristiche ' che ci consegna la ' forma ' di un sistema[53]; infatti una tabulazione di questo tipo descrive esaustivamente la mappa delle sue indiscernibilità: due elementi inviati l'uno sull'altro da una sostituzione caratteristica saranno indistinguibili; viceversa, se la rappresentazione tabulare deve render conto delle indiscernibilità del sistema se due elementi sono indistinguibili, essi dovranno comparire in una stessa colonna; d'altra parte se due elementi occupano in un allineamento del tabulato due posti determinati, la coppia ordinata che essi formano risulterà indiscernibile dalle coppie degli elementi che occupano rispettivamente gli stessi posti nei restanti allineamenti, e cosí in generale per le s-adi $(1 \leqq s \leqq n)$ ordinate di elementi del sistema.

In seno alla tavola delle sostituzioni caratteristiche di un sistema, si evincono dunque le indistinguibilità di ognuna delle sue componenti[54].

Ora le collezioni cosí poste in corrispondenza possono dar luogo a situazioni tipiche, di cui vale la pena riferire perché ci serviranno in seguito. In primo luogo, se ogni sostituzione caratteristica del sistema invia una sua collezione o su se stessa o su un'altra collezione disgiunta

[52] Né, come s'è visto, avrebbe potuto farlo; d'altra parte riserverà la denominazione di ' gruppo ' ad una classe piú ristretta di oggetti (i gruppi regolari di sostituzione).

[53] Due sistemi sono dunque portatori della medesima ' forma ' quando posseggono una tavola di ' indistinguibilità ' isomorfa, dove si deve tener conto non solo dell'isomorfismo gruppale tra le leggi compositive delle costituzioni, ma anche di una biezione sugli elementi su cui esse agiscono. È in effetti questo che Kempe asseriva definendo la forma proveniente da due dati: numero di elementi e loro distribuzione (cfr. p. 9).

[54] Ciò benché non sempre le autocorrispondenze di una collezione siano in grado di esprimere tutte le indistinguibilità dei suoi elementi: in generale occorre rifarsi alla tabulazione del sistema che contiene tale collezione. Può infatti esistere una sostituzione del sistema che invia un elemento della collezione in un altro elemento della stessa (il quale risulterà pertanto indistinguibile rispetto al primo in seno al sistema), per quanto questa sostituzione non rappresenti una autocorrispondenza della collezione, nel senso che almeno un elemento di quest'ultima viene inviato su un elemento che non le appartiene.

da essa, la collezione in questione viene chiamata ' insieme ' [55]. Inoltre un elemento x del sistema è detto ' univoco rispetto a una data collezione ' se non esiste nessuna sostituzione caratteristica del sistema che li contiene entrambi che lasci fissa la collezione in questione ed invii l'elemento x su un elemento differente [56].

Se questo è il linguaggio adottato da Kempe non ci resta che esaminarlo in azione: siamo infatti in possesso di tutte le nozioni attraverso cui Kempe procede alla ' cattura ' dei gruppi. La definizione che viene data è la seguente: un insieme singolo i cui elementi siano univoci rispetto a ciascuno degli altri è detto g r u p p o . Cerchiamo di capire di che cosa si tratti: l'insieme è singolo, ovvero ogni suo elemento viene inviato da qualche sostituzione su ciascuno degli altri; pertanto se esso ha n elementi la tavola delle indistinguibilità che lo rappresenta avrà almeno n righe. Il fatto poi che ogni suo elemento sia univoco rispetto a tutti gli altri significa che non esiste alcuna sostituzione caratteristica

[55] Ogni sistema è un insieme, ma non sempre è vero l'opposto. Possiamo a questo punto riassumere le differenze intercorrenti tra le nozioni di sistema, collezione, insieme. Abbiamo visto che un insieme è una collezione di n unità del sistema tale che se la sua immagine attraverso le autocorrispondenze ' caratteristiche ' del sistema contiene qualche elemento appartenente all'insieme, allora li contiene tutti; in altre parole il trasporto dell'insieme attraverso la sostituzione del sistema o è un automorfismo dell'insieme stesso oppure è una collezione indistinguibile e disgiunta da esso. Un insieme può non costituire un sistema in quanto sussiste la possibilità che esso venga inviato ' in blocco ' su una collezione del sistema-ambiente (che costituirà a sua volta un insieme): i due insiemi cosí apparentati sono, per definizione, indistinguibili e pertanto non formano un sistema. Nel caso invece in cui una collezione del sistema è portata su se stessa da ogni sostituzione del sistema (nel senso che la sua immagine coincide in ogni caso con essa), allora la collezione costituirà non solo un insieme, ma anche un sistema, mentre il sistema che la contiene risulterà multiplo. Resta da chiarire la differenza tra collezione e insieme: una collezione non è necessariamente un insieme dal momento che possono esistere sostituzioni del sistema-ambiente che inviano alcuni elementi della collezione su elementi della stessa, ma altri su elementi che non le appartengono: è precisamente l'esclusione di una simile eventualità che definisce un sistema. In riferimento alla nota precedente possiamo concludere che un sistema, a differenza di una collezione, è portatore di un assetto (la distribuzione delle sue indistinguibilità ' interne ') che è invariante rispetto al gruppo di sostituzioni che lo accoglie; collezioni e insiemi possono non essere sistemi perché connessi a indistinguibilità che debordano dal loro raggio.

[56] Ciò va inteso in termini di ' aspetti ', nel senso che la condizione richiede l'inesistenza di una permutazione ' propria ' del sistema che, ristretta alla collezione esaminata, rimanga identica mentre l'elemento x viene spostato.

che lasci fissa qualche componente [57]. Pertanto ogni colonna del tabulato deve presentare un elemento soltanto una volta e le righe saranno al piú n. Avremo cosí una tavola di n righe e n colonne, ciascuna delle quali presenterà tutti e soli gli elementi dell'insieme.

I gruppi a cui Kempe si riferisce sono pertanto i gruppi regolari di sostituzione: basta tuttavia la condizione che ha formulato per individuarli? È quanto Cayley non pare disposto a concedergli. Ma prima di ascoltare le sue ragioni, siamo obbligati a una breve digressione storica.

In un primo tempo Cayley [58] aveva proposto per i gruppi una traduzione ' grafica ' (*quasi - geometrical representation*) secondo il seguente procedimento: dopo aver mostrato la possibilità di esprimere un qualsiasi gruppo ' astratto ' finito in termini di gruppo regolare di sostituzioni (teorema di rappresentazione), allestiva un ' diagramma ' di quest'ultimo facendo uso delle decomposizioni in cicli di sue sostituzioni indipendenti (dalla composizione delle quali si possano ottenere le rimanenti). Nel grafo cosí costruito i vertici rappresentano gli elementi del gruppo (gli argomenti delle sostituzioni) e gli spigoli — orientati, salvo nel caso di scambi — le sostituzioni puntuali. Ogni sostituzione utilizzata viene individuata da una determinata colorazione degli spigoli che la rappresentano e i suoi cicli descrivono dei poligoni orientati di uno stesso colore, disgiunti e con il medesimo numero di lati. Attraverso questa procedura si ottiene una configurazione pluricromatica (in generale), tale da collegare ogni coppia di vertici del grafo lungo ' cammini ' prescritti dall'orientamento degli spigoli, in modo che da ogni vertice si diparta e arrivi esattamente una freccia per ogni colore impiegato. In tal modo l'indicazione di una determinata sequenza di colori determina univocamente un percorso sul grafo e, se si dicono ' equivalenti ' due percorsi che portano un vertice su un'identica meta, avremo in tutto tanti percorsi non equivalenti quanti sono i vertici del grafo: essi rappresentano le sostituzioni del gruppo. Il grafo ha infatti la proprietà che, se un percorso riporta un punto su se stesso, allora la stessa sequenza di colori prescrive un itinerario che riporta ogni altro punto ini-

[57] Se ciò accadesse avremmo infatti che ogni lettera spostata dalla sostituzione non è piú univoca rispetto a quella mantenuta fissa.

[58] Arthur Cayley, *Theory of Groups: Graphical Representation*, « American Journal of Mathematics », I (1878), e *On the Theory of Groups*, « Proceedings of the London Mathematical Society » IX (1878); entrambi gli scritti si trovano anche in *The Collected Papers of Arthur Cayley*, New York, Johnson, 1963 ai nn. 694 e 690.

ziale su se stesso, ovvero — come dice Cayley — descrive un ' circuito '. È grazie a questa proprietà che il grafo esprime un gruppo, le sue sostituzioni essendo individuate (se n è il numero dei vertici) da n sequenze di colori non equivalenti, che prescindono dal punto iniziale a cui possono essere applicate.

In un articolo successivo [59], Cayley propone un diverso metodo di rappresentazione, che dichiara di aver desunto da Kempe [60]. La configurazione prospettata in questo caso è detta *colourgroup* e differisce dalla precedente in quanto in grado di esprimere tutte le sostituzioni di un gruppo. Essa consiste di $\frac{1}{2}\, n(n-1)$ linee colorate che congiungono n punti: tali linee sono in generale orientate (e vanno considerate « come vettori condotti da un punto verso un altro punto »), benché possano sussistere spigoli privi d'orientamento. Per ogni colore avremo una e una sola linea d'arrivo, una e una sola di partenza per ciascuno dei punti. Ogni percorso possibile da un punto verso un altro punto è dunque esprimibile in modo univoco attraverso una sequenza ordinata di colori: ora questa trascrizione descrive un itinerario (indifferente ai punti iniziali a cui può essere applicato) e gli itinerari debbono essere « di effetto indipendente », il che significa che se un itinerario è un circuito a partire da un determinato punto iniziale, resta tale se si muta il punto di partenza, oppure — equivalentemente — che se due itinerari sono equivalenti rispetto ad un certo punto (ossia portano entrambi su un altro identico punto), continueranno ad essere equivalenti rispetto ad ogni altro punto iniziale. Il numero delle linee (orientate) di un dato colore sarà n, o $\frac{n}{2}$ nel caso di linee non orientate. Otteniamo cosí una rappresentazione per i gruppi regolari di sostituzioni, una sostituzione essendo individuata dalle linee di un determinato colore (non orientate nel caso essa sia composta di scambi), la sua inversa venendo omessa dalla configurazione perché riassumibile in termini d'inversione nell'orientamento delle frecce. Il numero dei colori dipenderà pertanto dalle sostituzioni che si decompongono in scambi e varietà da $\frac{1}{2}(n-1)$ a $n-1$. Tuttavia per determinare univocamente un gruppo non è necessario indicare tutte le sostituzioni: è possibile omettere alcuni colori da un *colourgroup* e conservarne un numero che permetta di connettere

[59] A. Cayley, *On the Theory of Groups*, « American Journal of Mathematics », XI (1889); ristampato in *The Collected Papers*, cit., n. 887.

[60] Il riferimento è a *A Memoir on the Theory of Mathematical Form*.

ogni punto ai rimanenti attraverso qualche itinerario; a partire da questi è infatti possibile ricostruire l'intera tavola delle sostituzioni, in conformità alla strategia che abbiamo indicato in precedenza.

Cayley elenca poi le tavole dei gruppi regolari di sostituzioni di ordine da *2* a *12*, corredandole dei dati del rispettivo *colourgroup* (numero dei colori, numero e tipo dei ' poligoni ' che esso contiene). Passa infine ad esaminare le possibili rappresentazioni di questi gruppi attraverso l'utilizzazione di due soli colori e rileva che in questi casi è possibile omettere dalla configurazione l'indicazione dei vertici per mezzo di simboli differenti: i vertici possono restare senza nome, dal momento che « ogni punto, per quanto concerne le sue relazioni con gli altri punti, risulta indistinguibile da essi »[61]. E aggiunge: « Questa potrebbe sembrare una relazione di simmetria equivalente a quella formulata in precedenza sull'effetto indipendente di ogni itinerario »[62]: ma le cose non stanno cosí. Si possono infatti costruire configurazioni analoghe (che esprimano, cioè, relazioni d'equivalenza della stessa sorta), le quali tuttavia non rappresentano gruppi, per quanto possano determinare una tavola di sostituzioni — di cui fornisce un esempio — di n righe ed n colonne ciascuna senza ripetizione di elementi. Ma questa condizione non è sufficiente alla designazione di un gruppo: si può trattare semplicemente di un ' quadrato latino ' e Kempe — nella sua elencazione dei gruppi di ordine da *2* a *12* — ha accolto precisamente un esemplare di questo genere spacciandolo per gruppo.

Ma che cosa fa di un quadrato latino un gruppo? La condizione per cui la sostituzione che esprime il passaggio da una qualsiasi riga della tavola ad un'altra deve inviare — se applicata alla riga iniziale — su un'altra riga ancora appartenente alla tavola (la condizione equivale a quella dell' ' effetto indipendente ' per *colourgroup*). Senza questo contrafforte, dunque, l'edificio di Kempe sembrerebbe crollare in frantumi.

Apprestiamoci pertanto a rintracciare tra queste presunte macerie gli indizi che motivano la ragione della deficienza del congegno allestito da Kempe. L'oggetto che costui aveva di mira erano i gruppi regolari di sostituzione, una prerogativa dei quali è che le loro sostituzioni si decompongano in cicli disgiunti di egual periodo: ma non è questa la condizione che viene compromessa dagli esemplari di ' quadrati latini ' che forniscono — chi inconsapevolmente e chi no — sia Kempe sia

[61] Cayley, *op. cit.* (ediz. 1963), p. 655.

[62] *Ibid.*

Cayley. Nel caso di Kempe ciò non rappresenta una circostanza fortuita: non perché egli dimostri che tale situazione sia conseguenza della sua definizione gruppale, bensí perché ne prescrive in generale l'intervento, ricavandolo da nozioni anteriori.

Siamo dunque risospinti all'indietro, per rinvenire le tracce di questa motivazione ed esaminare come si attagli al caso dei gruppi: in altre parole se convengano all'oggetto denominato ' gruppo ' dei requisiti sottaciuti. Per fare questo abbiamo necessità di considerare alcune nozioni che Kempe fa precedere alla definizione gruppale e che impiega nella relativa rappresentazione grafica. La prima nozione che ci serve è quella di ' rete semplice ' (*simple network*): si tratta di un sistema singolo di coppie, le cui coordinate appartengono ad un sistema di individui anch'esso singolo. Abbiamo dunque a fare con un sistema di elementi indistinguibili tra loro e con un altro sistema (la rete) costituita da coppie di elementi del primo a loro volta indistinguibili in quanto coppie l'una dall'altra. Dal momento che la rete forma un sistema, a partire da una coppia data che le appartenga, essa dovrà contenere tutte le coppie indistinguibili rispetto alla prima, ' indistinguibili ' evidentemente in seno alla mappa di indiscernibilità del sistema precedente: quello, cioè, delle coordinate. Conformemente alla procedura di rilevazione di indistinguibilità su un tabulato di un sistema, avremo dunque una rete scegliendo una coppia di elementi appartenente ad una riga della tavola (un ' aspetto ' del sistema) e considerando tutte le coppie ordinate che occupano, riga per riga, le stesse colonne. Dal momento che il sistema di elementi è supposto singolo, tutti questi compariranno come coordinate nelle coppie della rete; inoltre una rete è contrassegnata da un numero (*way-number*), che esprime la quantità delle sue differenti coppie che hanno una stessa coordinata: tale numero è invariante rispetto alla scelta di una coordinata particolare [63]. Infine ogni rete si compone di una o piú ' porzioni ' separate e ' continue ': nel caso siano in numero plurale, esse risulteranno indistinguibili l'una dall'altra, perché — dice Kempe — le coppie componenti di porzioni distinte risulterebbero a loro volta di-

[63] Nel senso che se esistono m coppie distinte che hanno come prima coordinata un elemento x, per ogni altro elemento che compaia come prima coordinata (vi compariranno tutti dal momento che il sistema è supposto singolo) avremo ancora m coppie distinte. Inoltre le coppie che hanno x come seconda coordinata sono ancora m; lo stesso varrà per ogni altro elemento del sistema. Torneremo in seguito sulla ragione di questa invarianza.

stinte, contravvenendo quindi all'ipotesi di indistinguibilità tra le coppie di una rete semplice.

Tutto ciò richiede un commento: innanzitutto le ' porzioni continue ' di cui parla Kempe sono ' catene ', ossia successioni di coppie consecutive (del tipo (a,b), (b,c), (c,d). . .) che combaciano su una coordinata come le tessere del domino. Kempe ci dice dunque che la collezione delle coppie indistinguibili da una coppia data si raggruppano in catene, separate (ovvero disgiunte) se in numero plurale: ogni catena conterrà tutte le coppie ' componibili ' a partire da una determinata coppia. L'indistinguibilità tra due ' porzioni ' (tra due catene) si rileverà dalla tabulazione del sistema delle coordinate, attraverso una sostituzione puntuale che invia le coordinate dell'una su quelle dell'altra. Asserire pertanto che due porzioni P, P' non sono indistinguibili (ma distinte) significa negare l'esistenza di una sostituzione di questo tipo[64]: ma dal momento che il sistema delle coordinate è supposto singolo, ogni suo elemento verrà inviato dalle sostituzioni della tavola sui rimanenti. La distinzione tra due porzioni si può pertanto esprimere attraverso la condizione seguente: per ogni sostituzione σ che invia una coordinata di P su una coordinata di P', esiste almeno un'altra coordinata $x \in P$ tale che $\sigma(x) \notin P'$. Ma le coordinate di P formano coppie consecutive e saranno tali anche quelle che si formano (ricalcandone l'ordinamento) sulle loro immagini attraverso σ. E benché queste coppie facciano parte della rete che contiene tanto P quanto P' (sono infatti indistinguibili dalle coppie di P), la loro collezione non coincide con P'. Ma ciò è assurdo, perché per ipotesi $\sigma(P)$ contiene una coordinata di P' e pertanto una coppia ' componibile ' con almeno una di quelle di P'. Ma la porzione P' contiene per definizione tutte le coppie della rete che si possono connettere consecutivamente con quelle che le appartengono, perché è supposta disgiunta da ogni altra porzione ricavabile dalla stessa rete. Sicché tale circostanza è impossibile: come diceva Kempe, le coppie di

[64] Si noti che è sufficiente il dato di una biezione tra le coordinate di due porzioni (ossia due ' aspetti ' che compaiano nella tabulazione, dunque ' indistinguibili ', all'interno dei quali si possa rilevare questa corrispondenza puntuale) affinché venga automaticamente rispettata la loro configurazione in termini di catene di coppie; in altre parole una corrispondenza biunivoca tra le coordinate di due porzioni non può alterare la ' struttura ' delle catene, dal momento che queste vengono formate a partire dalle compatibilità che si presentano in seno a una rete: infatti, se partiamo dalle coordinate di una porzione e ne ricostruiamo le coppie all'interno di un allineamento (una riga della tavola degli aspetti indistinguibili del sistema), la componibilità delle coppie immagine è assicurata.

porzioni distinte non possono essere indistinguibili. Ricaviamo da queste informazioni sulla decomposizione di una rete in porzioni (disgiunte e continue) che tali porzioni formano ' insiemi ' (nel senso che Kempe riserva a questo termine) che — in quanto ' indistinguibili ' — hanno lo stesso numero di elementi.

Ora, anche i ' gruppi ' (come definiti da Kempe) formano sistemi singoli [65] e pertanto si applicano ad essi le considerazioni precedenti. Dal momento che le colonne che compaiono nel tabulato di un gruppo non presentano nessuna ripetizione, le reti semplici che si ricavano sono tutte *one-way*. Attraverso queste Kempe appronta una rappresentazione grafica per i gruppi: si rappresenterà una rete semplice (che sappiamo essere una collezione di coppie indistinguibili), indicando ogni sua coppia tramite una freccia orientata che congiunge la prima componente alla seconda: ad ogni rete semplice verranno in tal modo associate frecce orientate e la loro ' componibilità ' (l'occorrenza di vertici consecutivi), descriverà uno o piú poligoni (i lati essendo costituiti dalle frecce), separati tra loro se in numero plurale: sono le ' porzioni separate e continue ', che avevamo incontrato nel caso generale, che in questa circostanza formano ' poligoni ' in quanto ogni rete semplice presenta una e una sola freccia d'arrivo, una e una sola di partenza, per ogni componente delle sue coppie (ovvero, per ogni elemento del gruppo).

Indicheremo con grafie differenti le frecce di reti differenti, ottenendo con ciò un allestimento perfettamente analogo a quello di Cayley, salvo per il fatto che in questo caso le frecce non rappresentano le sostituzioni puntuali del tabulato gruppale attraverso la successione delle righe, bensí l'assunzione iniziale di una coppia (entro una riga del tabulato) e l'elencazione di tutte quelle indistinguibili da essa (le sue immagini, cioè, attraverso le sostituzioni): il che equivale all'individuazione di due colonne in seno al tabulato, o anche a una sostituzione t r a c o l o n n e. Il grafo che in Cayley consentiva la rappresentazione delle sostituzioni tra righe, rappresenta pertanto in Kempe quelle tra colonne: ma in un gruppo regolare di sostituzioni, considerando le sostituzioni tra colonne nel suo tabulato — il che è lecito perché i gruppi regolari hanno le colonne comprendenti tutti e soli gli elementi del gruppo — si ottiene ancora un gruppo regolare di sostituzioni, che risulta inoltre

[65] I gruppi sono per Kempe insiemi singoli; ora ogni insieme singolo, se considerato separatamente dal sistema ambiente di cui eventuaalmente fa parte, costituisce un sistema singolo.

isomorfo a quello di partenza. Ben inteso, Kempe non si preoccupa di dimostrare tutto ciò; non interpreta neppure il suo allestimento in questi termini: esso rappresenta semplicemente l'approccio conseguente alla sua impostazione. Dall'isomorfismo che si ottiene scambiando righe con colonne possiamo tuttavia concludere che se, da una parte, i gruppi di Kempe (comunque si interpretino) presentano una decomposizione delle sostituzioni in cicli disgiunti di egual periodo (conseguenza delle considerazioni sulle ' porzioni '), dall'altra non abbiamo speranza di mutare un quadrato latino in un gruppo attraverso lo scambio tra righe e colonne.

Se esaminiamo a questo punto la natura dell'ospite indesiderato che compare tra i gruppi elencati da Kempe, constatiamo che questo quadrato latino contravviene ad una delle ' aspettative ' che Kempe aveva enunciato a proposito delle reti: l'indistinguibilità delle porzioni a cui esse danno luogo non viene infatti rispettata. Ma questa aspettativa maschera l'intervento di un antefatto, l'urgenza di una richiesta che si installa in profondità tra le esigenze del discorso di Kempe: una ' necessità ' di cui abbiamo fatto uso precisamente nel corso della ' dimostrazione ' dell'indistinguibilità delle porzioni in cui una rete semplice si decompone. Questa circostanza riposa in effetti sul fatto che una rete semplice è invariante rispetto al rappresentante che la individua: è in altre parole una classe d'equivalenza. Ciò significa che se partiamo da una coppia di elementi ' rilevati ' nel primo allineamento della tabulazione e ricaviamo dalla coppia di colonne sottostanti la rete semplice che essa individua, scegliendo una qualsiasi altra coppia della rete e riportandola sul primo allineamento, la rete che si ricava a partire da essa coinciderà con la precedente [66]. Si noti che nel caso dei gruppi (regolari) questa

[66] Questa richiesta è inoltre in grado di render ragione dell'invarianza del *way-number*, che avevamo assunto in precedenza come valida. Infatti, supponiamo che la rete individuata da una coppia (x, p) presenti k coppie differenti che abbiano x come loro prima componente. Allora, se (y, i) è una coppia appartenente alla rete, possiamo considerare le k coppie (x, p), (x, q), (x, r), ... (indistinguibili) come giacenti su una stessa riga ed in corrispondenza ad esse le coppie immagini che giacciono sulla riga in cui l'immagine di (x, p) è precisamente (y, i): tali coppie avranno ovviamente y come loro prima componente, differiranno per la seconda e saranno indistinguibili da quelle da cui provengono, dunque da (x, p) e di conseguenza anche da (y, i); abbiamo pertanto k coppie indistinguibili da (x, p) che mantengono fissa la prima componente. Né altre possono esisterne, perché una eventuale (y, j) appartenente alla rete ma non compresa tra le k precedenti risulterebbe tuttavia ' leggibile ' sullo stesso allineamento e come tale interpretabile come immagine di una coppia (x, h) non compresa tra le (x, p), (x, q), (x, r), ... e

circostanza equivale alla richiesta di Cayley per le sostituzioni: infatti se queste vengono lette verticalmente, una rete semplice rappresenterà una sostituzione da una colonna (prime componenti delle coppie) ad un'altra: pertanto se si sceglie sulla prima riga una coppia arbitraria di elementi, e attraverso questa una rete, esisterà una colonna della tavola che esprime la stessa sostituzione a partire dalla prima (basterà scegliere l'elemento della prima riga che forma con il primo una coppia della rete precedentemente considerata).

Dunque gli oggetti che Kempe ha chiamato ' gruppi ' sono effettivamente gruppi regolari di sostituzione e la presenza tra loro di un quadrato latino evidentemente non è che una svista, non un errore di impostazione. Cayley, forse irritato dalla macchinosità dell'impianto di Kempe [67], ne tralascia senza dubbio la lettura in dettaglio, non ne ispe-

tuttavia indistinguibile come immagine da esse per la transitività della relazione di equivalenza. In modo analogo si mostra che il numero delle coppie indistinguibili da (x, p) che hanno x come seconda componente è ancora k. Siamo in grado di derivare tutto ciò perché autorizzati ad interpretare la giacenza di due coppie di elementi su una stessa coppia di colonne come loro indistinguibilità: è questa una ipotesi di ' regolarità ' richiesta ad ogni rappresentazione tabulare di un sistema.

È ancora sulla base di quest'ipotesi che Kempe formula alcune ' aspettative ' a proposito dei gruppi: l'invarianza delle reti gli permette infatti di considerarle prescindendo dalla scelta di un rappresentante e di interpretare una sequenza di reti $R_1 R_2 R_3$ ... equivalentemente alla prescrizione di un itinerario nel senso di Cayley. Una coppia appartenente alla prima rete verrà ' composta ' con quella della seconda che ha come prima componente la seconda della prima coppia, e cosí via: la catena ottenuta (se non descrive un circuito) avrà come ' terminali ' una coppia appartenente ad una determinata rete R della tavola (ovvero una sostituzione colonna-colonna) e se si considerano tutte le catene ottenibili secondo il procedimento prescritto i loro terminali apparterranno ancora alla rete R, che può venire in tal modo considerata il ' prodotto ' delle precedenti. Tale condizione equivale a quella dell' ' effetto indipendente ' di Cayley.

Tutto ciò consente di approntare una rappresentazione grafica ' in compendio ': per rappresentare un gruppo basterà infatti costruire un grafo che esprime una rete Q costituita da alcune reti semplici del gruppo, in modo che ogni coppia dei suoi elementi sia collegata da una catena di coppie appartenenti alle reti semplici di cui si compone Q; inoltre, se R_2 è una di queste reti, le sue coppie connettono le porzioni disgiunte che sono formate dalle restanti reti di Q. Le varie combinazioni di percorsi (ossia i prodotti tra reti) permetteranno la ricostruzione dell'intera tavola del gruppo.

[67] Vale la pena di riferire che Cayley, nel corso dell'elencazione delle tavole dei gruppi regolari di sostituzione di ordine da *2* a *12* (come rappresentanti di tutti i gruppi dello stesso ordine), ovviamente considerava — al pari di Kempe — tutti i possibili ' tipi ' di gruppo (ossia tutti i gruppi non isomorfi per una cardinalità data), annotando in proposito: « Ho appena fatto uso della parola tipo (*type*); il senso in cui essa è impiegata non richiede, penso, spiegazioni » (*On the*

ziona gli antecedenti, non ne decifra le necessità nascoste tra le ' aspettative ' elargite senza l'indicazione di una motivazione o di un'origine. È vero che Kempe non fornisce indicazioni precise sulla natura del grafo preposto alla rappresentazione gruppale, nel senso delle condizioni che permetterebbero di riconoscerlo come proveniente da un gruppo se dato semplicemente come grafo (ma ne prescrive soltanto il modo di costruzione a partire da una tabulazione che esprime un ' gruppo '): tuttavia queste condizioni si potrebbero ricavare in un modo o nell'altro senza troppe difficoltà [68].

Restano da esaminare piú da vicino gli indizi che hanno permesso di assolvere Kempe. Abbiamo addotto a questo proposito l'esigenza per cui una tavola di indistinguibilità esprima l'indiscernibilità tra coppie quale che sia la loro occorrenza o rilevazione in seno ad essa. Ma nel fare questo abbiamo proceduto a tentoni: la richiesta sembrava ragionevole [69] e sufficiente tanto a rendere conto di alcune asserzioni di Kempe, quanto a fare di semplici quadrati latini dei gruppi. Per quanto ragio-

Theory of Groupe [1887], ediz. cit., p. 642). Orbene, è precisamente questo senso che costituisce il cuore del discorso di Kempe: ' tipo ', in questo caso, è infatti sinonimo di ' forma '. In effetti, il tabulato del gruppo rappresenta tutti e soli gli automorfismi del grafo che abbiamo costruito a partire da esso: se a un ' automorfismo ' chiediamo una permutazione degli elementi che conservi il tipo e l'orientamento della freccia che li connette, avremo come automorfismi possibili quelli che preservano le reti del grafo. Ora, le sostituzioni del gruppo inviano coppie di elementi in coppie di elementi ' indistinguibili ' dalle prime, ovvero — per definizione — appartenenti alla stessa rete: sono pertanto automorfismi del grafo. Non ne esistono altri, perché la tavola rappresenta un gruppo regolare di sostituzioni ed ogni altra sostituzione dovrebbe lasciare fisso un elemento almeno (sia esso x) rispetto ad un altro allineamento che compare nella tavola. Ma la nuova sostituzione deve conservare la disposizione delle reti e pertanto la coppia che ha x come componente nel primo allineamento conserverà lo stesso elemento all'identico posto. Avremo in tal modo due coppie indistinguibili (cioè appartenenti alla stessa rete) con una coordinata differente e l'altra in comune. Ma ciò è impossibile perché le reti che abbiamo costruito sono tutte *one-way*.

Lo stesso discorso si ripete nel caso della rappresentazione abbreviata del grafo che abbiamo esaminato nel corso della precedente nota (in tal caso ad un automorfismo si richiederà la conservazione del prodotto di reti che connette due punti).

[68] Per esempio adottando come condizione quanto Kempe asseriva a proposito del prodotto delle reti (cfr. nota 66).

[69] In effetti, se l'indistinguibilità è una relazione d'equivalenza, essa dovrà essere anche transitiva; pertanto, se una tavola è preposta a render conto esaustivamente delle indistinguibilità di un sistema, dovrà conservare invariato l'insieme delle immagini di una coppia (collezione delle sue indistinguibilità) se si muta la scelta del rappresentante.

nevole possa sembrare, essa resta tuttavia implicita in Kempe: questo silenzio non è casuale, dal momento che quest'esigenza non sembra sufficiente ad assicurare (univocamente, per lo meno) un assetto gruppale a una tavola di indistinguibilità in quanto semplice elenco di sostituzioni ' caratteristiche '. Finora abbiamo lasciato impregiudicato questo problema: abbiamo interpretato le tavole di indistinguibilità dei sistemi (non necessariamente ' singoli ') come gruppi dei loro ' automorfismi ', ma dal momento che Kempe non si esprime a proposito dei loro modi d'instaurazione (ossia su che cosa considerare un automorfismo, termine che per altro non impiega), dobbiamo chiederci perché una rappresentazione tabulare debba costituire un gruppo (ovviamente non sempre regolare). Come si è detto, Kempe non si esprime in questi termini e riserva la denominazione di ' gruppo ' soltanto a quelli che definisce come tali, ossia ai gruppi regolari di sostituzioni. Non c'è dubbio, tuttavia, sul fatto che intenda riferirsi a un gruppo di sostituzioni quando parla di una rappresentazione tabulare di un sistema e ciò è deducibile dalla sua asserzione (per quanto incidentale, in apparenza se non altro) secondo cui ogni riga della tavola può venire interpretata come derivata (tramite sostituzione delle lettere) da un'altra riga e se la stessa sostituzione puntuale viene applicata su una qualsiasi altra riga della tavola, si dovrà ottenere una riga che a sua volta le appartenga [70]. Anche in questo caso ci troviamo di fronte ad un' ' aspettativa ' che lascia nell'imbarazzo a proposito della sua interpretabilità come richiesta piuttosto che come conseguenza di precedenti richieste.

Se l'assumiamo come richiesta, come prescrizione da imporre alla relazione di indiscernibilità o sua definizione implicita (interpretando l'indiscernibilità tra n-adi come esistenza di una sostituzione che invia l'una sull'altra), otterremo che essa definisce una relazione d'equivalenza sulle n-adi del sistema a n elementi rappresentato dal gruppo di sostituzioni, relazione d'equivalenza (cioè riflessiva, simmetrica e transitiva)

[70] È sufficiente infatti questa richiesta affinché la tavola delle sostituzioni formi un gruppo. Sicché sarebbe bastato questo fatto per prosciogliere Kempe, dal momento che le tavole di quelli che vengono da lui denominati ' gruppi ' sono tavole d'indistinguibilità di insiemi (e perciò di sistemi). Il percorso indiziario che abbiamo seguito ha richiesto argomenti piú deboli quanto alle esigenze che esprimono, ma prossimi nell'intreccio dell'argomentazione al luogo destinato alla disamina dei gruppi (ricavando le ragioni di Kempe a partire dai commenti che aveva formulato a proposito delle rappresentazioni grafiche dei gruppi) e pertanto agevolmente rintracciabili da parte di Cayley.

che si potrà restringere alle componenti di tali n-adi, fino ai singoli elementi. Questa lettura ' locale ' è inscritta nelle biezioni del sistema che compaiono nel gruppo.

D'altra parte se consideriamo la relazione d'indistinguibilità come relazione d'equivalenza tra allineamenti dell'insieme, avremo che la loro collezione forma un gruppo di sostituzioni: prescindendo dal reperimento di tali indistinguibilità, è la struttura d'equivalenza che prescrive loro un assetto gruppale [71].

Quale che sia la postazione che si sceglie, l'avvistamento non cambia: sono in ogni caso le autocorrispondenze dei sistemi a consentire la loro lettura interna ed è la loro disposizione in classi d'equivalenza o — equivalentemente — la loro strutturazione in gruppi di sostituzioni a vergare la carta delle loro ' indiscernibilità '.

Abbiamo dunque accertato che la presa dell'allestimento di Kempe sui gruppi (in quanto gruppi regolari di sostituzioni) è salda e ricavato una veduta sufficientemente trasparente sull'impianto generale della sua teoria. Possiamo pertanto concludere la vicenda gruppale ed esaminare quali altri raccolti Kempe intenda tentare.

Non ci dilungheremo piú di tanto nel far questo: dal momento che il congegno si è rivelato nei dettagli, si tratterà piuttosto di appurarne l'efficacia. Finora è stata la disponibilità di un teorema di rappresentazione a costringere i gruppi a collimare con lo schema di Kempe, ma non tutte le strutture sono duttili quanto i gruppi. Nondimeno Kempe esamina l'assetto di una generica struttura algebrica: lo schema di costruzione di un' a l g e b r a da lui fornito è il seguente. Se consideriamo tutte le triple ordinate [72] che si possono formare con gli elementi di un sistema S di cardinalità n, otteniamo un nuovo sistema con n^3 elementi (ossia il prodotto $S \times S \times S$). Possiamo allora considerare tutti i sottoinsiemi di quest'ultimo la cui proiezione sulle prime due componenti coincida con $S \times S$ e le cui triple siano tali che due di esse aventi le due prime componenti identiche abbiano identica anche la ter-

[71] La riflessività della relazione d'equivalenza tra allineamenti del sistema comporta infatti l'esistenza di una sostituzione identica, la simmetria quella di una inversa per ogni sostituzione, la transitività la loro chiusura operatoria. Il gruppo in questione è inoltre univocamente definito ed anche in questo caso l'equivalenza tra allineamenti implica quella tra componenti.

[72] T r i p l e, e non piú t r i a d i, perché non si tratta piú di sottoinsiemi ordinati del sistema ma di elementi del prodotto ed è pertanto consentita la ripetizione di uno stesso elemento nelle coordinate di una tripla.

za. Avremo in tal modo una collezione A di n^{n^2} insiemi di questo tipo, ognuno dei quali contenente n^2 triple. Un'algebra è per Kempe precisamente uno di questi insiemi: le sue triple esprimono il grafo funzionale $S \times S \rightarrow S$ che rappresenta per esteso la legge di composizione (definita ovunque in S): $(a, b, c) \leftrightarrow a \cdot b = c$, veduta senza dubbio ' moderna ' [73] per il periodo in cui Kempe scrive, ma di cui ci preme soprattutto esaminare le conseguenze in sede di disquisizioni di ' forma '.

La collezione A, dice Kempe, ci fornisce ogni possibile esemplare di algebra [74] (della cardinalità data): ogni operazione (binaria e univoca) definibile su S, « associativa o non associativa, commutativa o non commutativa », è contemplata nella collezione come suo elemento particolare. Se non facciamo alcuna speciale ipotesi su S, ovvero se lo consideriamo una semplice molteplicità di n elementi entro cui nessun ' aspetto ' manifesti distinzioni rispetto agli altri, allora la forma di A — aggiunge Kempe — non potrà che provenire dalle modalità della sua costruzione. Ma in che cosa consiste la forma di A? Da capo, nella distinguibilità e indistinguibilità dei suoi elementi (in questo caso le ' algebre '). Le sostituzioni ' caratteristiche ' di A invieranno dunque le algebre sulle loro immagini ' indiscernibili '; Kempe afferma che A è un sistema multiplo: pertanto non tutte le algebre risulteranno indistinguibili. Ma da dove provengono queste distinzioni e che cosa assicura, al contrario, l'apparentamento tra due algebre della collezione? L'unico dato di cui siamo in possesso è la forma di S: assumere che non esistano distinzioni al suo interno significa infatti ammettere il gruppo simmetrico su n lettere in qualità di suo gruppo ' caratteristico ' (ogni aspetto viene infatti inviato su tutti gli altri). Possiamo allora avanzare un'ipotesi che, se non trova riscontro esplicito nel testo, sembra tuttavia confortata dalla mancanza di alternative plausibili: presumiamo, dunque, che una coppia di algebre risulterà indistinguibile se esiste una corrispondenza caratteristica di S che invia gli elementi dell'una in quelli dell'altra, il che equivale a richiedere che alle triple della prima corrispondano tutte e sole quelle della seconda. D'altra parte le sostituzioni caratteristiche di S (ovvero tutte le permutazioni dei suoi elementi) inviano algebre su altre

[73] Per quanto abbiamo fatto uso di una terminologia insiemistica che non è di Kempe, è precisamente questa situazione che egli sta descrivendo.

[74] Dove s'intenda definire (ovunque) un'unica operazione binaria. Kempe considererà in seguito la possibilità di algebre dotate di piú operazioni.

algebre [75], ma non per ogni coppia di algebre esiste una corrispondenza di questo tipo: ossia, come voleva Kempe, A è un sistema multiplo [76].

Per le ipotesi fatte su S dichiarare l'indistinguibilità tra due algebre $A, A' \in$ A significa affermare l'esistenza di una biezione $\sigma : S \rightarrow S$ tale che $(a, b, c) \in A$ se e solo se $[\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)] \in A'$, oppure in notazione operazionale $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, che rappresenta la definizione consueta di isomorfismo (salvo per il fatto che il sistema di sostegno è lo stesso) [77]. Nel caso, invece, in cui S abbia un gruppo piú ristretto di quello simmetrico, dovremo conformarci ad esso per rilevare quali siano le algebre indiscernibili da un'algebra data: come dice Kempe, alcune algebre indistinguibili nel primo caso diverranno ora distinte [78].

Se non abbiamo forzato i termini del discorso di Kempe, possiamo concludere che esso è in grado di far presa su determinate situazioni ' strutturali '. Ma la circostanza che si sia dovuto ricavarle di traverso, derivate da un caso particolare (il tracciato delle indistinguibilità prescritto da un gruppo simmetrico) e attraverso indizi disseminati tra le righe del testo, è ancora una volta significativa del fatto che in questo viluppo è su un'altra situazione che cade l'accento: è dalle indistinguibilità di S e da quelle di A (conseguenti alle prime) che si diramano tutte le informazioni su cui abbiamo operato ed è pertanto ancora a questo congegno che è demandata la trasmissione delle forme. Un apparentamento ' in astratto ' tra due sistemi riposa per Kempe sulla similarità delle rispettive mappe di indistinguibilità: ovvero sull'isomorfismo dei loro gruppi caratteristici in quanto gruppi di sostitu-

[75] Nel senso che le triple che si ricavano dall'immagine garantiscono l'univocità dell'operazione che esprimono.

[76] La corrispondenza tra le coordinate può essere infatti una permutazione arbitraria tra gli elementi di S, ma dev'essere compatibile con la relazione che individua le triple definenti le algebre in questione.

[77] Non si tratta di un automorfismo, a meno che le triple immagini appartengano anch'esse all'algebra di partenza e la sostituzione non descriva che una loro permutazione. Infatti due algebre indistinguibili non sono in generale la stessa algebra, nel senso che il loro grafo funzionale è differente (per quanto isomorfo) e descrive pertanto due operazioni distinte sullo stesso insieme sostegno.

Le corrispondenze che mantengono inalterate le triple di un'algebra dovrebbero costituire per parte loro la forma di quest'ultima (insieme delle sostituzioni compatibili con un' unica operazione).

[78] Kempe, *Memoir*, § 286. Viceversa algebre che nel primo caso erano distinte rimarranno tali (§ 284): la loro distinzione è indifferente alla forma di S e proviene

z i o n e[79]. La possibilità di fare di tali sistemi delle strutture (algebriche o relazionali) è relegata sullo sfondo e con essa l'eventualità di loro isomorfismi. Si noti che la costruzione di un'algebra su un sistema (secondo la procedura di Kempe) ha una ripercussione sul suo gruppo caratteristico, nel senso che se quello iniziale era il gruppo simmetrico, poiché nulla permetteva discriminazioni tra i sottoinsiemi del sistema, la definizione di un'operazione univoca su di esso ha come effetto quello di apporre una relazione ternaria all'insieme stesso, cioè di distinguere tra triple di elementi: il gruppo di indistinguibilità d e l l ' a l g e b r a viene pertanto ristretto, rispetto a quello del sistema iniziale, a quelle permutazioni che sono compatibili con l'operazione dell'algebra. È questo l'assetto astratto secondo cui è consentito considerare il nuovo sistema, in quanto algebra: occorre allora chiedersi se un'algebra dotata di forma ' simile ' (cioè di un gruppo di ' indistinguibilità ' isomorfo a quello dell'algebra precedente) abbia in comune con la prima anche la struttura, ossia risulti isomorfa rispetto ad essa. In questo caso l'approccio di Kempe riuscirebbe equiestensivo rispetto al linguaggio delle strutture: ma le cose stanno altrimenti. Due strutture isomorfe hanno ovviamente lo stesso gruppo di automorfismi, ma non vale l'opposto: la similarità di forma non comporta l'isomorfismo dei sistemi che la esprimono [80].

Eppure è questo il dispositivo di Kempe: l'oggetto di studio è per lui costituito dal gruppo delle indistinguibilità di un sistema, dai percorsi descritti dai suoi automorfismi. Allora è facile indovinarne data e luogo di provenienza: Erlangen, 1872.

Se è lecito proseguire lungo questa traccia [81], i gruppi di sostituzione

precisamente dal fatto che è impossibile istituire tra esse una corrispondenza compatibile con le rispettive operazioni.

[79] Cfr. nota 53. È questo l'unico isomorfismo contemplato in quanto tale dal discorso di Kempe.

[80] Ovviamente non c'è modo di associare univocamente una specie di struttura ad un gruppo di sostituzioni che fungano da suoi ' automorfismi ', nel senso che ad un unico gruppo corrisponderanno piú specie. Ma anche all'interno di una specie di struttura due suoi esemplari non isomorfi possono avere lo stesso gruppo di automorfismi, e ciò accade anche nel caso dei gruppi (astratti). Viceversa in quello dei gruppi regolari di sostituzione, le cose erano andate altrimenti perché Kempe li aveva interpretati come gruppi di ' automorfismi ' dei grafi che venivano loro associati (nel senso precisato alla nota 67). Non si può chiedere, a rigore, l'identità di forma tra due ' gruppi ', perché sono essi stessi la ' forma ' di qualche sistema.

[81] Non crediamo, infatti, alla singolarità di una costruzione — per di piú fati-

diverranno i dati di partenza, da dissodare per rinvenirne le ' verità ' inscritte, per estrapolarne invarianze, conformemente al motto di Klein: « data una molteplicità ed un suo gruppo di trasformazioni, studiarne le entità dal punto di vista delle proprietà che non sono alterate dalle trasformazioni del gruppo » [82].

Questo significa, nel nostro caso, determinare quelle relazioni che il gruppo lascia invariate, che valgono — in altre parole — per un determinato argomento (una k-pla ordinata di elementi del sistema) e per tutte le sue immagini attraverso le sostituzioni del gruppo, e soltanto per queste [83]. Il che corrisponde al discorso di Kempe, perché una tavola di indistinguibilità esibisce n-ple indiscernibili di un sistema, e su queste andranno commisurate le compatibilità (le invarianze) di ogni eventuale relazione: due sistemi dotati della stessa ' forma ' lasciano in questo senso inalterate le medesime ' proprietà '.

Quanto al rilevamento delle indistinguibilità, esse provengono dall'invarianza di proprietà del sistema che si considera, ma i modi del loro reperimento appartengono a una zona di silenzio del testo: ci viene semplicemente dichiarata la relatività del criterio (« si possono in ogni caso ignorare differenze ») [84] e ciò sembra alludere alla scelta prospettica attraverso cui l'astrazione si attua caso per caso: omettere informazioni del sistema ' concreto ' significa in generale ampliarne il gruppo.

Ma questo fatto sembra indicare che l'astrazione si esercita al di fuori di seminati assiomatici (che prescriverebbero le indistinguibilità del sistema): è su un tessuto di conoscenze che la matematica riconosce come proprie, su una regione del sapere e sulla ragnatela degli asserti sugli oggetti che le competono che si dovranno attingere le indiscerni-

scente — che nasca per proprio conto, concepita autonomamente al di fuori di motivazioni di ricerca che non siano quelle di un puro piacere di sintesi. Kempe è per altro piuttosto avaro di informazioni in proposito: salvo generici riferimenti a ' risultati recenti ' della matematica, non fornisce indicazioni sulle ispirazioni del suo discorso. Vero è che Klein opera su molteplicità numeriche e che la teoria di Galois (che tratta in effetti dell'indiscernibilità delle radici di un'equazione) potrebbe apparire piú consona al suo disegno, anche per l'opposizione continuo/discreto; ma una prospettiva unificante venne intrapresa solo da Klein.

[82] Felix Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, § 1*, Deichert, Erlangen, 1872 (trad. francese [*Le programme d'Erlangen*], Parigi, Gauthier-Villars, 1974, p. 7).

[83] Le sostituzioni che non alterano le relazioni in questione coincidono cioè con quelle del gruppo.

[84] Kempe, *Memoir*, § 124. Si veda anche il § 127.

bilità interne ad un sistema. Su un terreno ancora smosso, dunque, che la prospettiva assiomatica riordinerebbe in una gerarchia di proposizioni, l'estrapolazione di una forma cerca invece ' simmetrie ', ed il decorso dell'astrazione schiaccia alcuni dislivelli, scegliendo fino a che punto spingere il reperimento di uniformità: è l'assunzione di un materiale fluido, precedente all'assiomatizzazione, che lascia un certo gioco all'instaurazione di forme. La mancanza di una chiara ricognizione del meccanismo assiomatico non deve per altro stupire se si pensa al periodo in cui Kempe scrive: d'altra parte, una volta che un sistema sia stato ' messo in forma ', le relazioni da cui proviene divengono irriconoscibili rispetto alle altre possibili relazioni invarianti rispetto al gruppo ed anche la possibilità di un loro ordinamento gerarchico passa cosí in secondo piano: ogni invariante assume pari dignità rispetto agli altri e proprio questo fatto consente l'assimilazione di sistemi di ' natura ' differente, tanto per quel che concerne la loro immagine ' concreta ', quanto — come si è visto — per quel che riguarda la loro struttura. Sennonché l'astrazione che in questo modo si effettua ha in Kempe pretese esplicative, nel senso che la riconduzione di un oggetto matematico alla sua ' forma ' dovrebbe esprimere la sua riduzione a uno spazio adeguato di sopravvivenza. Ma a denunciare difficoltà è precisamente il potere esplicativo di un tale allestimento, la sua possibilità di caratterizzare le entità matematiche in quanto sistemi portatori di forme, in modo analogo a quello in cui Klein caratterizzava le geometrie attraverso i loro gruppi di trasformazioni [85].

[85] Possiamo a questo punto tentare di chiarire alcune questioni lasciate in sospeso a proposito dell'articolo di Kempe *On the Relation between the Logical Theory of Classes and the Geometrical Theory of Points*: la visuale che otterremo non sarà tuttavia soddisfacente.

A. A. Grau (*Ternary Boolean Algebra*, « Bulletin of the American Mathematical Society », LIII, 1947) allestisce un sistema di postulati analogo a quello di Kempe delle triadi lineari. Lo interpreta in termini di algebre di Boole per mostrare come queste vengano completamente caratterizzate dai postulati del suo sistema: algebre di Boole non isomorfe daranno infatti luogo (secondo il trasporto di strutture descritto) ad algebre ' ternarie ' non isomorfe e viceversa. La circostanza che distingue le due specie di strutture è tuttavia decisiva nella prospettiva di Kempe: infatti nel caso dell'algebra ' ternaria ' « non si hanno elementi con significato particolare quali *0* e *1* »; in altre parole il sistema è ' omogeneo ', nel senso che « *tutti i suoi elementi hanno proprietà equivalenti* » (Grau, *loc. cit.*, p. 568), il che — tradotto nel linguaggio di Kempe — significa che il sistema in questione è singolo. In effetti « quali che siano *a* e *b*, esiste un automorfismo di *K* che trasforma *a* in *b* » (*ibid.*, teorema II, p. 571): ma ciò descrive una situazione differente da quella della equivalente algebra di Boole, il cui gruppo di automor-

Di fronte a tutto ciò il linguaggio strutturale rappresenta un altro discorso, una strada differente che la matematica ha intrapreso: l'essenza

fismi risulta piú ristretto. Come si può presumere dal fatto che nell'un caso compaiono delle 'costanti' tra i simboli primitivi del sistema, nell'altro no, la scelta nella presentazione degli assiomi influisce cosí sul gruppo degli automorfismi: il che significa, con buona pace di Kempe, che i due sistemi — per quanto equivalenti — non posseggono la stessa 'forma'.

Per dilucidare questo fatto, e piú in generale il congegno di Kempe, possiamo citare un altro articolo (F. I. Mautner, *An Extension of Klein's Erlangen Program: Logic as Invariant-Theory*, « American Journal of Mathematics », LXVIII, 1946), che in effetti di Kempe sembra riproporre le intenzioni 'epistemologiche'.

Dal momento che il gruppo degli automorfismi dell'algebra di Boole di tutti i sottoinsiemi di insieme I di n elementi è dato dal gruppo simmetrico S_n di tutte le permutazioni degli elementi di I, si presenta la possibilità di interpretarlo come gruppo degli automorfismi del calcolo proposizionale: poiché esso costituisce il piú ampio gruppo di trasformazioni sull'insieme dato, il gruppo degli automorfismi di ogni teoria matematica definita sullo stesso dominio risulterà suo sottogruppo. Il quesito che Mautner si pone è allora: si possono derivare le teorie matematiche dalla logica (nel senso di identificarle come teorie-invarianti rispetto a un sottogruppo del gruppo simmetrico), allo stesso modo in cui le geometrie sono ottenute a partire da quella proiettiva? La risposta è tuttavia parzialmente negativa: « Un sottogruppo del gruppo simmetrico è in generale il gruppo degli automorfismi di diverse funzioni proposizionali $f(x, ...)$, $g(x, ...)$, ... cioè il gruppo degli automorfismi di ogni teoria matematica in cui $f(x, ...) \vee g(x, ...) \vee ...$ sono idee primitive. [...] Inoltre il gruppo degli automorfismi di molte teorie matematiche è cosí ristretto da non essere in grado di caratterizzare le teorie in questione. Per esempio la teoria dei numeri ha soltanto l'identità come automorfismo, e lo stesso vale per la teoria dei numeri reali. I numeri complessi hanno un solo automorfismo oltre l'identità » (Mautner, *loc. cit.*, p. 383). Nondimeno, è possibile ottenere una classificazione piú soddisfacente ritornando sulla stesura degli assiomi, il che non rappresenta un artificio; piuttosto un miglioramento della teoria in questione, « dal momento che è caratteristico del metodo assiomatico assumere gli individui senza significato, dunque in particolare indistinguibili » (*ibid.*, p. 348): per esempio, è possibile una riformulazione degli assiomi dell'aritmetica in modo che « nessuno speciale simbolo individuale con un significato distinto (come zero) o simbolo speciale per una relazione distinta (per esempio successore o minore di) occorrano »; in tal modo « ogni assioma è invariante rispetto alle permutazioni degli individui » (p. 383). Allora, « se c'è un solo dominio d'individui, il formalismo di ogni teoria assiomatica completamente formalizzata deve essere invariante » (p. 348) rispetto al gruppo simmetrico, che viene cosí assunto come gruppo soggiacente.

Che cosa è allora possibile ottenere? Non molto: « La conoscenza di tutti gli invarianti booleani simultanei di funzioni proposizionali fornisce una conoscenza sistematica di tutte le teorie matematiche assiomatizzate in modo completamente formalizzato nei cui assiomi f, g, ... occorrono come idee primitive o funzioni proposizionali variabili. Per esempio, la determinazione di tutti gli invarianti booleani rispetto a S_n di una funzione proposizionale a tre variabili fornisce una conoscenza di tutte quelle teorie di cui la teoria dei gruppi, quella dei quasi-gruppi ecc. costituiscono casi speciali » (p. 384): lo stesso ordine di problemi, come si vede, era stato affrontato mezzo secolo prima, con un'attrezzatura rudimentale, da Kempe.

messa in gioco dall'impianto di Kempe non equivale (quanto alle sue oggettive possibilità di espressione) a quella contemplata dal discorso strutturale, l'identificazione di entità avviene nei due casi tramite procedure distinte, la prima delle quali non è in grado di raggiungere la seconda.

Esaminata la portata effettiva dell'allestimento teorico di Kempe, resta da sbrogliare la vicenda attraverso cui ne siamo venuti in possesso. Il discorso informale di Kempe è stato dunque travisato da Bôcher, che ne trasferisce il sottinteso matematico in un contesto che gli è non soltanto estraneo ma anche irraggiungibile. Che cosa se ne può ricavare? Innanzitutto, non si può render conto della facilità con cui Bôcher può equivocare se non ammettendo la disponibilità di un sostituto verosimile, agevolmente identificabile, per il referente reale della divulgazione di Kempe: la stessa assunzione delle vedute di quest'ultimo in quanto espressione di un ' paradigma ' riposa evidentemente su questa possibilità, perché, da una parte, sia Kempe sia Bôcher si riferiscono al suo contraltare matematico come a una teoria svolta, esistente di fatto, e non enunciano un ' programma ' demandato al futuro, dall'altra Kempe è agli occhi di Bôcher il rappresentante di un punto di vista diffuso. È dunque grazie alla fortuna di quest'ultimo che viene consumato l'equivoco: è la posizione che il linguaggio strutturale ha assunto nel giro di un ventennio (quanto separa Kempe da Bôcher) che lo rende un referente immediatamente accessibile [86]; è la sua possibilità di presentarsi come *koinè* che consente lo scambio tra teorie rispondenti ad un medesimo ' paradigma ' e rende possibile a Bôcher la contraffazione dei termini del discorso di Kempe.

D'altra parte l'intelligibilità di una ' metafora ' in sede matematica è riposta sul successo delle nozioni che essa impiega (la cui familiarità restringe la possibilità di fraintendimenti) e sussiste sempre un riferimento a un sottofondo di conoscenze inespresso, ad un clima culturale implicito. Ma è precisamente questo clima ad essere mutato e l'inconsue-

[86] Nel momento in cui Bôcher scrive, a rigore, il linguaggio strutturale (come ci viene presentato nell'articolo) è appena nato: nondimeno appare ai suoi occhi tanto conseguente da attribuirgli una predominanza retrospettiva in situazioni in cui non potevano esserne rilevabili che accenni. Tuttavia sono stati tali e tanti gli accadimenti matematici intercorsi dalla stesura di *Memoir* da rendere irriconoscibile la dottrina di Kempe in quanto teoria matematica: mutati gli interessi, le conoscenze, lo stile, i riferimenti che ne permetterebbero la ricognizione appaiono ormai lontani, tanto da lasciar sopravvivere un semplice ' paradigma '.

tudine dei termini che compaiono nel resoconto di Kempe (come ' forma ', ' indistinguibilità ' e via dicendo) ne rendono impraticabile la lezione, dal momento che non rimandano ad una loro adozione matematica da considerarsi nota.

Sicché è propriamente il linguaggio informale a funzionare da ' medio ' tra l'interpretazione di Bôcher e la sua motivazione originale: esso innesca l'equivoco, perché è a partire dalle dichiarazioni epistemologiche di Kempe che Bôcher individua (deformandolo) il loro prolungamento teorico. Bastano la revoca delle vecchie definizioni, accenni al criterio di determinazione della loro veisione aggiornata, qualche allusione al meccanismo delle ' essenze ' cosí individuate, perché Bôcher si senta autorizzato ad ascrivere il tutto al linguaggio delle strutture, ritenendo di riconoscerne il ' paradigma ' in una versione semi-allegorica che riguarda invece un'altra realtà. Ma con che cosa è costruito l'intreccio del resoconto informale? Dai termini della divulgazione, da una parte, a cui è demandata la traduzione del linguaggio matematico nel linguaggio comune, trasformazione su cui gravano le ambiguità che un'impresa di questo tipo sembra comportare in ogni caso e quelle che scaturiscono dalla scelta infelice degli esempi, dalle inconsuetudini terminologiche che, prive di una descrizione adeguata del loro funzionamento matematico, si prestano a un facile malinteso. Ma una divulgazione non basta a fare un ' paradigma ': sono le considerazioni che le si accompagnano, la ricerca di nuove definizioni ' reali ' e la loro trasgressione rispetto alle ' concezioni tradizionali ', per esempio, che oltrepassano l'argomento divulgativo, immettendo in un altro livello di discorso ed offrendo all'equivoco un appiglio di natura differente. Non si tratta qui di rispettare il dettato matematico attraverso un'attenuazione informale, piuttosto di evocarlo all'interno di un diverso ordine di realtà.

Quanto a questa ' realtà ', non si potrebbe ragionevolmente dirla filosofica, perché altre sono la terminologia e l'argomentazione che la filosofia impiega, benché assomigli a quell'ambito ' speculativo ' verso cui Kempe ostentava diffidenza in quanto esso gli appariva disobbligato da utilizzazioni in sede matematica e pertanto connesso da legami piuttosto estrinseci alla realtà che in fin dei conti è chiamato a descrivere: se sono le entità matematiche che lo alimentano, esso le ripropone in un'ambientazione differente, assumendole come termini del discorso ma utilizzandole altrimenti in quanto nozioni, proprio perché la discussione in cui vengono trasportate non è piú matematica. Ma è l'identica distorsione che ritroviamo, quasi fosse un esito inevitabile, nel testo di

Kempe, è il medesimo affrancamento relativo dalla realtà matematica che si ripropone: è il gioco che di fatto il testo rende possibile nel riferimento a questa realtà, testimoniato dalla circostanza — pretestuosa, forse, ma accertata — che l'equivoco perpetrato da Bôcher si attua precisamente su questo rinvio.

Si potrebbe ottenere una restrizione di questo gioco attraverso un impiego di termini matematicamente meno ambigui, di esempi piú pertinenti in grado di scartare interpretazioni alternative: attraverso il riferimento, insomma, ad un contesto matematico dai contorni sufficientemente precisi. Il ' discorso speculativo ' rimane in ogni caso debitore nei confronti di quella realtà eterogenea a cui necessariamente si riferisce: questo rimando si attua attraverso interferenze semantiche ed incrementando la spettanza del contraltare matematico il discorso risulterebbe maggiormente determinato; ma se attingendo in questo modo dalla matematica si circoscrive il designato possibile, cosí facendo il discorso slitta nella divulgazione, dal momento che la rete dei sottintesi non consiste piú nel rimando generico ad un sapere (storicamente delimitato e da caratterizzare ' ontologicamente '), ma si precisa su addentellati che sono frammenti teorici, riespressi in forma piú o meno involuta ma in quanto tali. La componente speculativa sembra sottintendere e non designare: per questa ragione essa può anche assumere la forma di un'aspettativa epistemologica, riferita ad un futuro a cui è demandata la costruzione di un referente matematico adeguato alla traccia ontologica che essa prescrive. Su questo metro si può valutare la realtà delle idee (come chiameremo, per semplicità, l'argomento delle considerazioni ' speculative '), saggiarne la forza propulsiva nell'urgenza della richiesta che esprimono: per natura incomplete, esse possono configurarsi in termini di esigenze epistemologiche, l'enunciazione di un problema il cui corrispettivo matematico rappresenta l'attuazione sollecitata dalla loro forma interlocutoria, la risposta eterogenea rispetto al luogo in cui la domanda è stata formulata. Proprio delle ' idee ' sembra dunque il restare in questa sospensione: la loro risoluzione avviene in qualcosa d'altro (in grado di provocare eventualmente un effetto retroattivo, una volta che la risposta matematica venga precisata: cosí l'esecuzione del programma logicista, conseguente — fino a dove è stato possibile — alle richieste che originariamente lo motivavano, ha mutato la stessa idea di logica, quale veniva coltivata in partenza). Sciogliere la loro forma allusiva significa dunque estinguere il debito inscritto nella loro natura: una volta ' completate ' esse subiscono una metamorfosi, sia che attraverso l'adozione di termini dal designato inequivoco si avvicinino progressivamente al territorio matematico, arrestandosi alla contingenza di un'unica zona teorica disponibile di fatto come referente o finendo col coincidere con essa, sia che — esito differente ma possibile — precipitino altrove, assoggettate da una metafisica che, in quanto discorso ' compiuto ', le accolga prendendo possesso tramite loro della matematica che le motiva. Vivere in questo interregno sembra cosí consono alle ' idee ': esse rappresentano in qualche modo un testo che esige un contesto per sussistere, senza che tale rinvio fuoriesca dall'indeterminato, pena la loro confisca da parte di un'altra realtà.

La componente ' ontologica ' del discorso di Kempe potrebbe allora essere indicata nell'idea di un sottofondo necessitante, retroscena comune soggiacente alle presentazioni delle entità matematiche entro compartimenti teorici irrelati e motivati da semplici consuetudini culturali, la cui realtà ' oggettiva ' è invece rivelata dall'architettura di ' essenze ' che si tratta appunto di esplicitare (e per saperne di piú si rileggano le metafore che si sono sprecate al proposito).

Ma se una tale idea non rinvia in modo necessario al luogo della sua risoluzione (se non per il fatto che questa deve essere matematica, non piú ' metafisica ', come Kempe imputava alle concezioni che l'avevano preceduta), si può ancora affermare che l'interpretazione di Bôcher la disattende? In realtà costui ne rispetta il testo, alterandone il contesto, e il fraintendimento rimane pertanto circoscritto alla zona della ' divulgazione '.

Se abbiamo riesumato una teoria senza seguito dalle macerie di cui la storia della matematica è disseminata, non è stato per accertare lo scollamento, piuttosto ovvio, tra idee e teorie, né per mostrare che nel linguaggio delle prime è difficile intendersi; d'altra parte, benché neppure questa circostanza possa costituire una rivelazione, non tarderemo a constatare nel corso del prossimo capitolo che lo sfociare dell'uno sui molti avviene anche in direzione contraria: una teoria, molte ' interpretazioni '. È piuttosto il contesto matematico in cui questo commercio ha luogo che deve attirare la nostra attenzione: nel caso di Kempe, le ' idee ' funzionano retoricamente a partire dal suo primo scritto e non possono pertanto venir considerate alla stregua di un mero intento promozionale (o decorso speculativo) della teoria. Se ci atteniamo infatti alle sue dichiarazioni, esse si configurano inizialmente come un sospetto (o un abbaglio) epistemologico, i cui indizi sono rappresentati da un'accumulazione di conoscenze matematiche che, se pongono in discussione l'apparato speculativo preesistente, inadeguato ad accoglierle, non reclamano un suo semplice aggiornamento ma sembrano esigere un radicale lavoro di riassetto: troppe, e troppo vistose, erano state le apparizioni di ' nuove entità ' perché non si manifestasse un contraccolpo ' ideologico ' nella concezione stessa di questa scienza.

Ciò a cui si accinge Kempe è allora un progetto di riordinamento teorico che rivela quale fosse il sommovimento in atto all'interno della matematica: il ' paradigma ' che lo sorregge rappresenta in questo senso un' i d e a in grado di ' mediare ' tra l'accertamento di questo stato di cose e la sua decifrazione teorica.

Una situazione analoga ci si ripropone su uno scenario piú ampio: se guardiamo alla situazione della matematica di fine Ottocento, constatiamo la presenza di tutte le strutture fondamentali che costituiranno di lí a poco l'argomento dell'algebra astratta, cioè dei materiali su cui si eserciterà una prima organica veduta strutturale [87]. Esse sono rinvenute ' in azione ' su zone differenti e in rispondenza a problemi o intenti di diversa natura, e per quanto la loro ' fenomenologia ' possa descrivere un percorso complesso (negli spostamenti delle loro ragioni d'interesse o nella diversificazione del loro utilizzo), esse sono disponibili di fatto, contenuti su cui ci si confronta. Tuttavia, perché possa instaurarsi una prospettiva strutturale, occorrerà approntarne l'esegesi, accordando loro una ricezione non piú occasionale (relativa cioè al loro luogo d'apparizione), bensí tematica, che facendone un modello per uno stile di trattazione se ne riappropri a livello concettuale.

Se dovremo occuparci di quest'ultima dimensione, piú che delle circostanze matematiche che ne costituiscono il presupposto, apparirà chiaro come vi risulti implicato il problema del riconoscimento ontologico di quelle ' nuove entità ', come requisito che precede o agisce parallelamente al riassestamento teorico destinato a inquadrarle in un'ottica unificante. In questo frangente non avremo a fare con un ' paradigma ' che le assuma esplicitamente come proprio argomento: cercheremo invece le loro tracce all'interno di un dibattito epistemologico a piú voci che non le coinvolgerà se non come dettagli spesso margi-

[87] Si vedano per esempio: J. Dieudonné, *La difficile naissance des structures mathématiques (1840-1940)*, in *La culture scientifique dans le monde contemporain*, « Scientia », volume speciale 1979; J. Guérindon e J. Dieudonné, *L'Algèbre depuis 1840*, in J. Dieudonné e altri, *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)*, vol. I, cap. III (Parigi, Hermann, 1978).

nali. Cosí, quantunque dalla vicenda di Kempe ciò che è sembrato potersi ricavare è che, se esiste un livello d'indagine adeguato al reperimento di un'elaborazione concettuale, è quello d'accostarsi agli edifici teorici come a monumenti (o rovine), indugeremo ancora nel territorio delle idee, brancolando tra testi accomunati semplicemente dall'attinenza con determinate problematiche ' ideali ': queste risulteranno assolvere compiti di natura eterogenea ed esprimere orientamenti diversi, ma si tratta di quelle che s'accompagnarono al delinearsi di una concezione strutturale, pur coinvolgendo altre situazioni (assiomatica, fondamenti) che, quand'anche si intersecano con la prima, non possono identificarvisi. Ci limiteremo, insomma, a rilevare le interferenze di queste idee con la tematica strutturale (che rimarrà quasi costantemente sullo sfondo), senza per questo costringerle in un itinerario teleologico, facendo di una consonanza spesso precaria un destino.

Cosí, prendendo spunto dall'indizio assai poco vincolante della ' generalizzazione ', non vogliamo proporre una scelta prospettica obbligata, ma scegliere semplicemente una postazione favorevole alla ricostruzione di un intreccio di idee che, quali possano esserne stati le utilizzazioni o gli esiti, rappresenta l'*humus* da cui storicamente un *logos structuralis* emerse. Tralasceremo dunque di ispezionare le motivazioni matematiche che condussero a postulare l'intervento delle strutture per rintracciarne, nella cattura da parte delle idee, l'eco della venuta.

Capitolo Primo

CIRCOSTANZE RELATIVE ALL'APPARIZIONE DEL PENSIERO STRUTTURALE

« La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse »
Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*

1. - Figure della generalizzazione.

In un articolo che Hadamard dedica nel 1912 al nascente ' calcolo funzionale '[1] la generalizzazione funziona come paradigma della teoria: è la sua isagoge o lezione speculativa, piú che un'occasione la necessità stessa di trasporla nel linguaggio delle idee, dal momento che è addirittura la motivazione dell'apparire della teoria ad essere proposta su questa falsariga, innestata com'è lungo un percorso teleologico (la storia di una ' generalizzazione ', appunto) che prende le mosse dall'invenzione del calcolo infinitesimale. Secondo Hadamard, infatti, questo avvenimento « non ha costituito semplicèmente un perfezionamento della matematica, ma ha contrassegnato un cambiamento radicale del suo orientamento »[2] e sono le tappe di un'ascesa verso l'astratto che scandiscono questo mutamento ontologico che caratterizza la f u n z i o n e quale entità matematica per eccellenza. La matematica, tuttavia, non ha conosciuto da un giorno all'altro questa trasformazione del proprio oggetto, ma l'ha ottenuta nel corso di un'evoluzione (sorta di stratificazione successiva), di cui Hadamard si appresta a ricostruire la ' storia ' secondo

[1] J. Hadamard, *Le calcul fonctionnel*, « L' Enseignement Mathématique », XIV (1912).

[2] *Ibid.*, p. 5.

una trama molto lineare: i primitivi oggetti della matematica, i numeri, inizialmente « concepiti come conosciuti e fissi »[3], vengono assoggettati dalla trattazione algebrica e considerati come incognite; in seguito, si trattano come variabili continue, ottenendo una prima versione del concetto di funzione (che subirà successivamente la trasformazione in corrispondenza arbitraria): le funzioni stesse vengono quindi sottoposte ad operazioni algebriche e infinitesimali, e — attraverso un ricorso dell'evoluzione vissuta a suo tempo dai numeri — si è portati a considerarle come incognite. Questo resoconto semplificato dissimula una storia ' reale ', con le proprie impellenze e le proprie ragioni; Hadamard non si sogna certamente di delineare nel puro piacere della generalizzazione il motore del progresso matematico: riposano altrove, al di là di questo scenario estetizzante, le richieste che ne hanno contrassegnato il divenire. Nondimeno è sulla base di questo disegno analogico che si possono indovinare le piste da battere: allo stadio a cui si è giunti, afferma infatti Hadamard, « si ragiona ancora su una funzione ben determinata, quand'anche rimanga incognita; inoltre le operazioni che le si fanno subire sono di un tipo ben determinato: quelle del calcolo algebrico ordinario e del calcolo infinitesimale »[4]. Ecco allora configurato il movente della nuova teoria, quasi fosse il compimento di una prescrizione teleologica: « *Se si vuole continuare a seguire, per ciò che concerne le funzioni, la stessa via che è stata percorsa partendo dai numeri*, occorrerà considerare la funzione medesima non piú come scelta una volta per tutte, ma continuamente variabile, ed a farle subire (...) operazioni piú o meno arbitrarie »[5]. Sono questi, per Hadamard, i tratti caratteristici di quella branca della matematica che va sotto il nome di ' calcolo funzionale ', in cui « si deve scorgere *il proseguimento e la conseguenza naturale* del calcolo infinitesimale e della corrente d'idee che l'ha fatto nascere »[6].

L'utilità della nuova teoria non è con ciò garantita che insufficientemente: « non basta — si affretta a precisare Hadamard — una di quelle analogie che troppo spesso si fregiano del nome di logica »[7] e che, se possono « suggerire le idee », non sono in grado di soppesarne il valore; occorre invece ricavarne la controprova da un ordine eterogeneo di con-

[3] *Ibid.*, p. 9.
[4] *Ibid.*, p. 10.
[5] *Ibid.*
[6] *Ibid.*
[7] *Ibid.*, p. 11.

siderazioni, attraverso la fecondità, cioè, delle loro applicazioni o le sollecitazioni (esterne) che le hanno richieste consentendo loro di presentarsi come « naturali allo spirito »[8]. In effetti, è sulla base di esigenze della meccanica che si sono poste le prime questioni di calcolo funzionale, mentre le molte sue altre utilizzazioni in sede fisica ne testimoniano ulteriormente l'importanza. Ma tutto ciò, a sua volta, non basta a conferire ad un cumulo di risultati matematici un contegno unitario, a farne una teoria: questo assetto è, viceversa, perfettamente adeguato alla traccia analogica descritta in precedenza. Ora, è proprio questo disegno epistemologico che sembra essere stato avventato, stando per lo meno a questo giudizio di Dieudonné: « Volterra, ispirato dal Calcolo delle variazioni, concepí l'idea di un nuovo ' Calcolo infinitesimale ' in cui i ' funzionali ' sostituivano le funzioni dell'Analisi classica: tentativo che ci appare oggi un po' prematuro, dal momento che le nozioni algebriche e topologiche che sono alla base dell'attuale Analisi funzionale erano pressoché inesistenti a quell'epoca, tanto che i lavori compiuti in questa direzione, specialmente da Hadamard e P. Levy, non si sono mostrati fin qui molto fertili di conseguenze importanti »[9].

Per parte sua Hadamard avverte, a conclusione dell'articolo, la perdita di evidenza che questa progressione verso l'astratto comporta: non si può piú avere confidenza con l'ambiente che ospita gli oggetti di cui ci si sta qui occupando, perché « *il continuo funzionale* (...) non offre al nostro spirito alcuna immagine semplice. L'intuizione geometrica non ci insegna nulla, *a priori,* sul suo conto »[10]. Sicché, mentre l'analisi classica poteva fare affidamento, fino a un certo punto, sull'evidenza che guidava nella scoperta delle proprietà del continuo, il calcolo funzionale sembra poggiare su un terreno totalmente sconosciuto: « siamo obbligati », conclude Hadamard, « a rimediare a questa ignoranza e non possiamo farlo che analiticamente, creando per il continuo funzionale un capitolo della Teoria degli insiemi »[11]. Vengono menzionati al proposito i primi lavori di Fréchet.

Le ricerche di Fréchet, a dire il vero, assumeranno un orientamento differente da quello prefigurato da Hadamard proprio quanto al modo della generalizzazione, tanto che Fréchet si sen-

[8] *Ibid.*

[9] *Abrégé d'histoire des mathématiques*, cit., vol. II, cap. VIII, p. 152.

[10] Hadamard, *op. cit.*, p. 17.

[11] *Ibid.*

tirà in dovere di distinguere l' ' analisi generale ', di cui si occupa, dal calcolo funzionale propriamente detto, la prima essendo contraddistinta dalla possibilità di prescindere dalla natura degli oggetti che saranno argomento delle ' funzioni ', contravvendendo in tal modo allo schema gerarchico proposto da Hadamard e corrispondente alla concezione quasi scolastica della generalizzazione che gli abbiamo visto teorizzare. Cosí Fréchet abbandona l'idea di un ordinamento cumulativo delle entità, secondo cui, assicurato uno stadio, possiamo abbandonarlo per dedicarci all'esplorazione di quello superiore: quando Hadamard presentava la funzione come nuovo oggetto della matematica, non parlava infatti metaforicamente, perché la generalizzazione a cui si giunge per prosecuzione di quanto — a suo parere — ha contrassegnato l'evoluzione di questa scienza immette precisamente in un livello in cui le funzioni sono assunte in qualità di individui, ottenuti per sovrapposizione rispetto al piano sottostante. Per Fréchet, invece gli oggetti che cadono sotto la nostra considerazione vanno considerati ' in astratto ', smontando in pratica l'universo gerarchizzante di Hadamard, e le proprietà infinitesimali che si riscontreranno sussistere ai vari livelli non saranno piú apparentate analogicamente (in conformità, se si vuole, all'arcaico ' principio di permanenza '), ma si parlerà delle stesse proprietà che agiscono su dominî distinti. Questo mutamento nel concepire la generalizzazione non si compie nell'ovvietà né senza resistenze, perché contraddistingue una trasformazione del discorso matematico: la possibilità di questo effettivo incamminamento verso l'astratto è offerta dalla disponibilità di una teoria degli insiemi che configura in tal modo gli oggetti.

Ma non basta questo fatto a far sí che il discorso matematico assuma un andamento strutturale, per quanto si possa considerare un prerequisito: a questo proposito vale la pena di ricordare che uno dei primi lavori di Fréchet consiste nel riaccomodamento, se si vuole, di una ' generalizzazione ' insiemistica, il risultato di Cantor, cioè, che eguaglia le potenze della retta e del piano [12]. Alla sorpresa suscitata da questa scoperta fece ben presto seguito l'insoddisfazione cui dava adito: la trascrizione in puri termini insiemistici delle entità matematiche le impoverisce in modo irrimediabile, tanto da permettere equiparazioni di ciò che l'intuizione si rifiuta di accomunare. Ma cosa significava quell'apparentamento se non l'aver privato i due spazi della loro struttura? È del

[12] M. Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait,* « Mathematische Annalen », LXVIII (1910).

resto ciò di cui già Dedekind era consapevole quando asseriva, rispondendo a Cantor, che la corrispondenza tra i due insiemi non avrebbe potuto risultare continua. Ora, Fréchet si preoccupa precisamente di conservare un significato matematico all'idea intuitiva di dimensione che veniva rimossa dall'appiattimento insiemistico. Occorreva raffinare il criterio di comparazione e restringere pertanto la portata della ' generalizzazione ': quest'ordine di idee immette in considerazioni di natura topologica e Fréchet sarà un protagonista dell'edificazione di quel sottofondo di cui Dieudonné lamentava la mancanza.

Avremo occasione di ritornare su questi temi nel corso del prossimo capitolo: per ora ci interessa piuttosto cercare il versante ' speculativo ' che Fréchet accorda alla ' generalizzazione '. Lo scritto da cui desumiamo il suo orientamento in proposito è una relazione che Fréchet presenta ai Colloqui di Zurigo del 1938 [13], dunque piuttosto tardo (e successivo all'assetto definitivo che hanno assunto le sue ricerche in fatto di ' analisi generale '): esso ci offre pertanto un resoconto tanto piú significativo in quanto redatto ' a cose fatte '. Lo spunto da cui Fréchet prende le mosse è costituito dall'opinione, che si prefigge di confutare, secondo cui la matematica « si riduce a una scienza deduttiva »: se le cose stessero veramente cosí, cioè se la matematica consistesse semplicemente in una successione di trasformazioni logiche, essa non potrebbe essere altro che « un gioco dello spirito senza alcuna portata » [14]. Ma la direzione dei suoi progressi non è imposta soltanto da necessità ' interne ' (organizzazione, sistemazione, semplificazione dei risultati), ma essenzialmente da « appelli venuti dal di fuori, da problemi concreti posti dalla natura e dalla tecnica » [15], perché è lo studio del ' mondo reale ' che ha generato la matematica ed a questo essa deve tornare per giustificare la propria esistenza. Per Fréchet qualsiasi branca di questa scienza è costituita da quattro apporti fondamentali, di cui l'aspetto deduttivo non rappresenta che la parte centrale, preceduta da una « sintesi induttiva », a cui seguirà uno stadio assiomatico « in cui dai risultati di questa sintesi induttiva viene fatto emergere l'insieme delle definizioni e degli assiomi che serviranno da punto di partenza per la teoria deduttiva » [16],

[13] M. Fréchet, *Les origines des notions mathématiques* (si trova in M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Parigi, P.U.F., 1955, cap. II).

[14] *Ibid.*, p. 13.

[15] *Ibid.*

[16] *Ibid.*

terza componente, appunto, da tenere in considerazione, a cui subentrerà « la verificazione delle conseguenze di questa teoria quando si sostituiscono alle nozioni astratte che vi compaiono le nozioni concrete che esse hanno il compito di rappresentare schematicamente » [17]. C'è da chiedersi in che cosa consista questa ' verificazione ' nel caso di teorie astratte in cui « le proprietà non dipendono dalla natura degli elementi considerati » [18], alle quali Fréchet riconosce per altro di aver dedicato la maggior parte dei suoi sforzi, ché in fin dei conti si tratta qui per lui di giustificare il proprio lavoro: infatti il ' concreto ' configurato in questo stadio è effettivamente tale, quanto quello da cui proviene la ' sintesi induttiva '; la matematica, insomma, è concepita come semplificazione schematica delle rappresentazioni sensibili ed i suoi oggetti come approssimazioni ideali di realtà fisiche, una concezione alquanto singolare se si pensa alle entità astratte con cui Fréchet ha avuto a fare in sede matematica. Il fatto è che, a suo parere, capita allo scienziato d'introdurre nozioni « puramente matematiche », svincolate dal rapporto diretto con lo studio del mondo sensibile (per quanto tutte le nozioni ' fondamentali ' rimangano imposte da problemi di origine concreta): si tratta in ogni caso di artifici di cui si potrebbe fare a meno, « ma che semplificano il linguaggio e forniscono potenti mezzi di dimostrazione e di scoperta » [19]. Cosí il matematico ha il diritto di creare nuove nozioni « in astratto », dove ' astratto ' significa per Fréchet il semplice affrancamento da un legame necessitante con il mondo esterno, legame che, per parte sua, viene configurato con temeraria disinvoltura.

Fréchet si dedica allora alla descrizione di due modi « alquanto generali » attraverso cui queste nozioni vengono introdotte. Il primo si riassume sotto l'idea di prolungamento e consiste essenzialmente nel liberare delle proprietà da restrizioni che esse incontrano in seno ad una determinata classe di entità, definendo una nuova classe che contenga la precedente e nella quale esse risultino sempre soddisfatte. La genericità della formula permette di far rientrare in questo schema tanto l'ampliamento degli interi ai razionali, dei razionali ai reali e dei reali ai complessi, quanto il passaggio dallo spazio metrico a quello proiettivo o anche il prolungamento analitico. Il secondo ' espediente '

[17] *Ibid.*, p. 22.

[18] M. Fréchet, *Sur une désaxiomatisation de la science* (cap. I di *Les mathématiques et le concret*, p. 1).

[19] Fréchet, *Les origines*, pp. 36-37.

per l'introduzione di ' entità artificiali ' verte invece sulla generalizzazione in quanto astrazione progressiva, nella sua accezione plurimillenaria di depauperamento del concreto: prescindere da aspetti di oggetti o di fatti concreti per non conservarne che certe caratteristiche costituisce infatti per Fréchet il procedimento « impiegato per portare una nozione dal di fuori all'interno della matematica » [20], ed una volta giunti a questo stadio nulla ci vieta di reiterare lo stesso metodo, applicato questa volta agli oggetti matematici. È in questo modo che Fréchet configura la nascita del calcolo vettoriale: la constatazione d'equivalenza tra vari teoremi vertenti a volta a volta su forze, velocità, rotazioni ha condotto ad interrogarsi sull'origine di questa similitudine e conseguentemente a sostituire alle precedenti nozioni quella di vettore, che fornisce « una rappresentazione molto imperfetta e molto incompleta di una forza o di una velocità, ma che è sufficiente dal punto di vista delle loro proprietà comuni » [21]. La generalizzazione cosí attuata, conclude Fréchet, è consistita nel trascurare certe caratteristiche degli elementi presi in considerazione, per quanto abbia lasciato loro ancora un significato geometrico: ma accade altrimenti nel caso dei gruppi astratti, esempio di un'astrazione « spinta all'estremo », conformemente alla quale è stata edificata una teoria generale indipendente tanto dalla natura degli elementi del gruppo, quanto da quella della sua legge di composizione. Fréchet non ha altro da aggiungere in proposito se non che la scelta delle definizioni assolve una mansione decisiva, in consonanza al celebre motto che Poincaré aveva formulato trent'anni addietro e che Fréchet riporta a conclusione del suo intervento: « La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose differenti. Accade che queste cose siano differenti quanto alla materia, ma simili per quello che concerne la forma, che esse possano — per cosí dire — venir inserite in uno stesso stampo » [22].

Ma gli avvenimenti matematici intercorsi durante questo trentennio (tra cui i lavori dello stesso Fréchet) erano stati assai significativi da questo punto di vista e, se potevano essere addotti a conferma delle vedute di Poincaré, avrebbero comunque motivato un commento meno dimesso: ma è tutto l'impianto epistemologico di Fréchet che appare stonato

[20] *Ibid.*, p. 39.

[21] *Ibid.*, p. 40.

[22] *Ibid.*, p. 43 (citato da *L'avenir des mathématiques* [1908]). Il motto ricompare in vari scritti di Poincaré.

al riguardo, improntato com'è al piú gretto empirismo [23] e tanto piú deludente se si pensa alla pratica matematica che gli fa da contraltare. Di fronte a quest'ultima, infatti, le concezioni filosofiche di Fréchet appaiono inadeguate, diremmo addirittura incongruenti se non sospettassimo di simili criteri di ' congruenza ': perché, se ancora ve ne fosse bisogno, ritroviamo in questo frangente lo scarto che sussiste tra idee e teorie, ancor piú eloquente in quanto testimoniato da un'unica persona, trattandosi delle idee che Fréchet professa a proposito di quella che è la sua attività professionale [24].

Ma torniamo al calcolo funzionale ed alla sua risonanza epistemologica: la sua apparizione dovette essere ben vistosa se Maximilien Winter poteva, nel 1913, scorgere in esso « la manifestazione piú importante delle matematiche contemporanee » [25]. La presentazione che ne fornisce, rilevandovi la consonanza ad un « movimento di idee », è adeguata al taglio prospettico che abbiamo scelto: per Winter, infatti, il calcolo funzionale è stato allestito « risalendo alle fonti stesse della scienza matematica » e si configura in primo luogo come « generalizzazione e approfondimento dei principî dell'analisi classica » [26], perché è precisamente alla confluenza di generalizzazioni diverse che la nuova teoria s'installa.

La prima di queste ricalca press'a poco lo schema che abbiamo visto proposto da Hadamard (per quanto sorretto da una ricostruzione storica senza dubbio meno frettolosa) e consiste nell'estensione dell'idea di continuo, nella sua riproposizione, cioè, ad un livello superiore, contrassegnato dalla generalizzazione del concetto di variabile che viene determi-

[23] Altrove, del resto, Fréchet letteralmente ' non ci sente ': per constatare la sua disarmante sordità in proposito si leggano i suoi interventi nel corso della discussione che segue alle relazioni di J. Cavaillès e A. Lautman in « Bulletin de la Société française de Philosophie », XL (1946).

[24] In un recente articolo dedicato alle vedute epistemologiche di Fréchet, J. L. Destouches se ne esce con questa dichiarazione: « Dal punto di vista filosofico (...) si può dire che Fréchet sia il nonno di Bourbaki » (*Les aperçus philosophiques de Borel et Fréchet*, « Epistemologia », IV [1981], p. 148). Viceversa, come s'è visto, è precisamente ' dal punto di vista filosofico ' che Fréchet non può venir considerato ' il nonno di Bourbaki '.

[25] Maximilien Winter, *Les Principes du Calcul fonctionnel*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XXI (1913), p. 462. La scelta di questo articolo non è peregrina come potrebbe sembrare; costituisce anzi una testimonianza quanto mai significativa della vita delle ' idee ', se Fréchet lo cita di continuo nel corso dell'articolo che, nel 1925 e sulla stessa rivista, dedica alla ' analisi generale ', nel quale si legge che « dopo l'esposizione di Winter molti m a t e m a t i c i si sono interessati all'analisi generale » (XXXII, p. 5, spaziatura nostra).

[26] Winter, *op. cit.*, p. 462.

nato nel passaggio dalla variabile numerica a quella funzionale. Un successivo apporto che è intervenuto nell'approntamento della teoria si fonda su un'ispirazione di differente provenienza: se quella geometrica rappresenta l'antecedente intuitivo della precedente generalizzazione, questa si presenta invece come proseguimento dell'orientamento aritmetico e si riconnette all'idea di sviluppo in serie. Cosí Hilbert può pensare una funzione come dipendente da un'infinità numerabile di variabili dipendenti e ambientarla a titolo di ' punto ' in uno spazio di dimensione infinita. « Concependo l'analisi come un'algebra a un'infinità di variabili — scrive Winter — la connessione delle idee che stanno alla base dell'algebra con quelle che servono da fondamento all'analisi è stabilita nella maniera piú profonda » [27], configurandosi, appunto, nella forma di una generalizzazione. La terza componente che concorre alla costituzione del calcolo funzionale verte sulla « generalizzazione delle proprietà formali delle operazioni » [28] e la sua ascendenza ' ideologica ' è fatta risalire alle concezioni di Leibniz, che per primo concepisce « l'identità formale di operazioni in realtà differenti » [29], e di Servois che, studiando sistematicamente le leggi del calcolo, ne evidenzia l'attualità sia a proposito delle funzioni, sia a proposito delle operazioni, facendo cosí emergere la possibilità di « trattare l'operazione come un oggetto » [30]. È tuttavia con Boole e Grassmann che « viene esplicitamente indicato il punto di vista formale » [31]: le nozioni di eguaglianza, somma, prodotto, si applicano infatti tanto ai numeri quanto alle operazioni stesse; leggi come la commutatività o la distributività si scoprono valere per le operazioni aritmetiche come per quelle del calcolo differenziale. L'ultima tappa di questo percorso consiste nel ridurre l'idea stessa di operazione a quella di corrispondenza funzionale in modo che l'uniformità di linguaggio cosí ottenuta sia rivelatrice di uniformità di fatto che intervengono nello studio del calcolo funzionale.

Se le numerose applicazioni in meccanica e in fisica testimoniano della fecondità della nuova teoria e sono garanti della sua ' obiettività ', Winter adombra nell'interferenza delle idee che hanno portato alla sua costruzione qualcosa di diverso dalla « coincidenza con le linee di strut-

[27] *Ibid.*, p. 466.
[28] *Ibid.*, p. 467.
[29] *Ibid.*, p. 471.
[30] *Ibid.*, p. 473.
[31] *Ibid.*

tura del reale »[32], una sorta di verità infrateorica: « La misteriosa unità (...) che avvicina le teorie in apparenza piú lontane, perde il suo carattere misterioso se si ricorda che originariamente e per i bisogni della dimostrazione logica si ritagliano brandelli da nozioni reali, complesse e sintetiche, e si lavora su questi frammenti d'idee, se cosí si può dire »[33]. È il presagio d'un'altra lingua, di un dislocamento degli interessi della matematica conseguente alla metamorfosi dei suoi oggetti ' reali ' in nozioni ' artificiali ' da esaminare *in vitro*? Niente affatto: non è ad una matematica ' strutturale ' che è riservato il lavoro su quelle entità incomplete, non è a un'adeguata forma del discorso che è demandata la rivelazione di confluenze teoriche, ma all'« opera del genio », a cui spetterà di « accostare gli uni agli altri quei frammenti che si erano in precedenza separati »[34].

Al di là di questo annuncio enigmatico, in effetti, nulla di preciso è detto a proposito del suo compimento (se non un suo intervento storico riscontrabile *a posteriori*), per quanto quest'idea di ' unità ' si accompagni spesso, come di necessità, a quella di generalizzazione, se quest'ultima non vuole ridursi « a sviluppare per se stesse teorie puramente astratte, smarrendosi sul terreno della logica formale e della scolastica »[35], dal momento che le generalizzazioni — afferma Winter a proposito di Fréchet — « sono interessanti nella misura in cui permettono di far progredire le teorie particolari ed i problemi ben determinati da cui esse sono sorte »[36]. A quest'affermazione fanno tuttavia da contraltare alcuni giudizi formulati da Winter in altro luogo riguardo ai « caratteri dell'algebra moderna »[37]: le teorie algebriche gli si presentano infatti dotate di « una sorta di vita autonoma »[38], ovvero svincolate dalla loro motivazione d'origine (la soluzione, appunto, di problemi particolari, come il calcolo delle radici di un'equazione generica di un grado determinato). In effetti, « cercando di superare le difficoltà che s'incontrano nei problemi di risoluzione delle equazioni algebriche, sono stati

[32] *Ibid.*, p. 463.
[33] *Ibid.*, pp. 462-463.
[34] *Ibid.*, p. 463.
[35] *Ibid.*, p. 509.
[36] *Ibid.*
[37] M. Winter, *Caractères de l'algèbre moderne*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XVIII (1910).
[38] *Ibid.*, p. 491.

formulati i principî di teorie che — inizialmente semplici dottrine ausiliarie — dovevano avere una risonanza considerevole sull'intera scienza matematica »[39], testimoniando di quell' ' arcana solidarietà ' tra le matematiche di cui abbiamo sentito parlare Winter a proposito del crocicchio epistemologico da cui scaturisce il calcolo funzionale. Ciò sembra contraddistinguere ai suoi occhi una costante del progresso matematico nei tempi recenti, un percorso di « elementarizzazione » che si compie parallelamente a quello d'accrescimento e che ne capovolga l'ordine storico d'acquisizione: la nozione piú profonda, scoperta per ultima, da punto d'arrivo si fa punto di partenza, venendo assunta come ' principio '[40]. La trasparenza che viene cosí ottenuta permette di considerare l'algebra come « fine in sé », produttrice di teorie generali e non piú come semplice ' mezzo ' che « fornisce algoritmi che altre scienze impiegheranno »[41]. Questo conferimento d'assenso, questo accordo d'interesse (che una considerazione di dignità rende tale, cioè autosufficiente), sembra dunque essere il passo richiesto ad una generalizzazione perché essa possa insediarsi nella zona franca del sapere.

Ritroviamo questa e le altre ' idee ' che fin qui abbiamo incontrato, disposte in una prospettiva meno occasionale (perché è su di esse che viene intessuta la trama del discorso), in un testo i cui intenti oltrepassano la promulgazione — o l'agiografia — di una determinata regione teorica e pretendono invece alla caratterizzazione ' filosofica ' del pensiero matematico nel suo complesso: si tratta di una serie di lezioni che Éduard Le Roy tiene nel corso del secondo decennio del secolo al Collège de France[42]. È la ' matematica pura ' che infatti si ha qui di mira, in quanto « tipo originale ed autonomo del sapere »[43], che ha il suo oggetto nella « rappresentazione intelligibile in quanto tale »[44] ed incontra nel suo svolgimento « alcune idee fondamentali di cui dispone il nostro pensiero, delle quali esplora e sviluppa i recessi, esplicitandone la ricchezza latente e determinandone l'uso legittimo »[45]. Non tarderemo a constatare che sarà proprio l'osservanza di questo taglio d'indagine a

[39] *Ibid.*
[40] Cfr. p. 496 (*ibid.*).
[41] *Ibid.*, p. 497.
[42] E. Le Roy, *La pensée mathématique pure*, Parigi, P.U.F., 1960.
[43] *Ibid.*, p. 2.
[44] *Ibid.*, p. 5.
[45] *Ibid.*

rivelarne le difficoltà, la sua aderenza a questo disegno a comportarne un esito ambiguo: ma esaminiamo dapprima la collocazione delle ' idee ' di cui ci stiamo occupando all'interno di quest'edificio, iniziando, come di consueto, dalla generalizzazione [46]. Questa è per Le Roy il metodo adottato costantemente in matematica, presente ad ogni suo stadio ed esplicativo del suo progresso; in accordo alla specificità del sapere a cui appartiene, essa è inoltre irriducibile alla sua versione tradizionale. La concezione classica della generalizzazione, infatti, è d'ispirazione grammaticale e si configura come un'operazione classificatrice basata sull'astrazione di caratteri comuni a partire da concetti dati, in modo che l'estensione di un'idea procede in ragione inversa a quella della sua comprensione, l'indeterminazione crescendo con la generalità. Ma « dal punto di vista matematico » le cose stanno altrimenti: il procedimento matematico che « si osserva » in questo caso consiste nel porre la definizione di una entità matematica anteriormente costruita « sotto forma nuova, equivalente alla prima in rapporto alle teorie già sviluppate, ma questa volta generalizzabile, cioè in modo che faccia apparire il vecchio concetto come caso particolare, come una degenerazione di un essere matematico nuovo, la cui definizione viene cosí suggerita. Il momento decisivo dell'operazione è quello in cui il concetto iniziale è considerato da un punto di vista che lo mostra centro di sostegno metodico in cui si raccordano due vie di calcolo » [47]. La guida analogica che sorregge l'argomentazione di Le Roy è evidentemente offerta dall'aritmetizzazione dell'analisi, benché egli possa far rientrare in questa figura anche le potenze degli insiemi infiniti a partire da quelli finiti, o l'integrale secondo Lebesgue rispetto a quello secondo Riemann. In ogni caso si motivano le ragioni della refrattarietà di questa pratica nei confronti di quella prospettata dalla tradizione filosofica: la generalizzazione matematica, se « è vero che si traduce in un accrescimento del concetto, (...) non si compie tuttavia per comparazione dei concetti ed astrazione dei caratteri comuni » [48]; essa è invece « operatoria » e la comprensione che comporta non viene impoverita, perché « il concetto generalizzato resta determinato e ricco quanto lo era quello iniziale » [49], la sola differenza consistendo nella sparizione di certe ' impossibilità operatorie '. Ne risulta un'architettura gerar-

[46] Cfr. cap. XXII (*ibid.*).
[47] *Ibid.*, p. 260.
[48] *Ibid.*, p. 264.
[49] *Ibid.*

chica, in cui i vari livelli vengono ritrasportati sul piano superiore, il quale per parte sua (una volta che ne venga determinata la « funzione d'insieme ») forma un complesso operatorio omogeneo. « Vasti sistemi operatori sono cosí studiati una volta per tutte e funzioneranno ormai come una sorta di nuova operazione elementare, senza che sia necessario ripercorrerne continuamente i dettagli interiori »[50]: il che è rivelatore del fatto che « conviene prestare attenzione piú agli insiemi che ai loro elementi », realizzando in tal modo un'economia di pensiero che è in grado di rivelare tra gli enti matematici presi in considerazione delle « analogie profonde », « che dipendono dalla specificità del raggruppamento e che il ritorno agli elementi primi, considerati a uno a uno, farebbe svanire »[51]. Su queste ' analogie ' si fonda una « classificazione per famiglie naturali »[52], di cui non si potrebbe esagerare l'importanza dal momento che « ciò che dà senso e valore a un concetto è precisamente di non essere isolato, (...) di prendere posto in una gerarchia governata dai rapporti di rassomiglianza e di differenza »[53]. Cosí, come osserva Poincaré, si consegue un progresso quando alla composizione dei vettori viene dato il nome di ' addizione ', « perché la si fa apparire come rientrante in una certa categoria di operazioni che formano un gruppo »[54], generalizzando in tal modo l'idea di addizione (per quanto scompaia in questo caso l'assetto gerarchico precedentemente apparso in qualità di componente necessaria alla generalizzazione).

Nonostante il suono ' strutturale ' di queste considerazioni, non ci troviamo in effetti in presenza che di una campionatura d'idee (come la natura ' operatoria ' della matematica, la ' funzione logica d'insieme ', la rivelazione di ' analogie profonde '), che funzionano come elementi d'appoggio su cui si avviluppa l'argomentazione di Le Roy e che, per quanto suggestive, galleggiano finora come mere presenze verbali, nodi del discorso che dovremo riesaminare e in certo modo ' risolvere '. Ma le esigenze del testo ci trasportano altrove, verso un tema che a dispetto delle apparenze non è periferico rispetto a questa trama ideale: se la generalizzazione si compie a partire dalla « trasformazione analitica di un concetto fino al punto in cui vi si discerne l'apertura di una via di gene-

[50] *Ibid.*, p. 258.
[51] *Ibid.*
[52] *Ibid.*
[53] *Ibid.*, p. 259.
[54] *Ibid.*

ralizzazione possibile »[55], a questa possibilità faranno riscontro differenti soluzioni praticabili. Ma ' verità matematica ' non è sinonimo per Le Roy di coerenza logica: da dove provengono allora le scelte che si effettuano in presenza di possibilità distinte, se non si tratta di decreti arbitrari? Non basta dunque descrivere la fenomenologia a cui si attiene l'introduzione di nuove nozioni, ma occorre cercare un criterio che la motivi e la giustifichi.

L'appello all'esperienza che solitamente s'invoca al proposito appare inadeguato ai suoi occhi: se la storia testimonia dell'origine empirica della maggior parte delle nozioni matematiche e se le esigenze della fisica stanno alla base dell'approntamento di numerose teorie (suggerendo perfino alcuni risultati), resta vero che « la realtà esteriore a riguardo della quale un concetto matematico è stato costruito non è piú rappresentata nella definizione finale »[56] e, per quanto reale ed importante sia il ruolo dell'esperienza, esso resta in ogni caso una causa « occasionale » e non quella « produttrice » di un concetto. Inoltre, accanto alle ricerche provocate da preoccupazioni applicative ve ne sono altre, « sempre piú feconde e numerose al giorno d'oggi », che sono ispirate da una « preoccupazione puramente logica di rigore e di generalità »[57]. Si propone cosí il problema di una verità ' intrinseca ' alla matematica, senza la quale questa scienza « non sarebbe che logica ed il valore di verità che essa possiede vi sarebbe portato dal di fuori »[58], riducendola con ciò a « una scienza ausiliaria o piuttosto un metodo, capace soltanto di un valore strumentale »[59]. Ma la fonte del progresso matematico è spesso immanente alla scienza stessa: l'introduzione di un nuovo concetto è in effetti frequentemente « necessitata da un'esigenza interna del sapere anteriore »[60]. Molti di questi concetti sono stati inventati come semplici artifici per aggirare ostacoli o risolvere difficoltà di calcolo: sotto questo punto di vista può venir interpretata la generalizzazione del numero effettuata dall'algebra. Ma la casistica è variegata: « altre volte il nuovo concetto si forma, per cosí dire, di per sé, come invariante delle

[55] *Ibid.*, p. 265.
[56] *Ibid.*, p. 271.
[57] *Ibid.*, p. 275.
[58] *Ibid.*, p. 276.
[59] *Ibid.*
[60] *Ibid.*, p. 277.

trasformazioni che si considerano »[61], permettendo classificazioni « secondo famiglie naturali »[62], o ancora « i concetti si introducono in qualità di elementi semplici che consentono lo studio intrinseco di tali o tal altri enti matematici »[63]; può accadere anche che sia attraverso l'economia di pensiero che si realizza per suo tramite che un nuovo concetto ottenga esistenza e valore distinti dal suo primitivo luogo d'apparizione[64], o infine il motivo di una ' creazione ' concettuale può esser cercato « nello sforzo del matematico per costituire una branca della scienza a titolo di disciplina specificamente indipendente e autonoma »[65].

In tal modo è spesso una sorta di criterio estetico che suggerisce la direzione verso cui condurre una generalizzazione e che conferisce alla matematica l'aspetto di « un'arte degna di esser coltivata per la sua propria bellezza »[66]. In che cosa consiste tuttavia la soddisfazione di questa esigenza, di che cosa è fatta « la sostanza intelligibile degli elementi inventati in proposito »? Vale la pena di riferire per intero la risposta di Le Roy: « Si tratta essenzialmente di un sistema di proprietà semplici e flessibili, di un fascio di rapporti solidamente annodati, in breve di una forma facilmente manipolabile nel calcolo e che si ritrova atta a funzionare ogni volta simile a se stessa in mille circostanze diverse »[68], della quale la nozione di gruppo connessa a quella di isomorfismo fornisce un esempio quanto mai significativo. Si perviene a generalizzazioni di questa sorta attraverso l'isolamento di una « funzione logica » rinvenuta in azione in uno o piú casi determinati: « l'eleganza e la comodità della forma cosí estratta ne assicurano il valore generale, e si cerca di

61 *Ibid.* Ne forniscono un esempio « le nozioni di *classe, rango, grado, ordine, genere*, ecc. in Aritmetica o in Algebra, nella teoria delle forme o quella delle equazioni ».

62 *Ibid.*

63 *Ibid.* « Cosí i numeri primi, fattori costitutivi indipendenti di ogni sistema di numerazione, o gli integrali abeliani annessi a una curva algebrica, ossia alla equazione definente una funzione implicita di un certo tipo ».

64 Il riferimento è in questo caso all'« idea di convergenza uniforme che, una volta posta a parte, riassume tutto un gruppo di ragionamenti applicabili a molteplici problemi simili, dispensando dal ripeterli in ogni nuova circostanza » (*ibid.*).

65 *Ibid.* « Non potrei citare un esempio migliore di quello dei corpi algebrici e delle molteplici nozioni che vi si connettono ».

66 *Ibid.*, p. 278.

67 *Ibid.*

68 *Ibid.*

disporre le cose in modo di poterla applicare loro »[69]. A questo schema Le Roy riconduce, oltre la generalizzazione dell'integrale da parte di Lebesgue[70], anche l'applicazione della nozione di limite ottenuta isolando la sua ' funzione logica ', appunto, dalle immagini in cui si confondeva nella sua accezione ordinaria. Sviscerare una funzione logica « allo stato puro » significa infatti far emergere il principio di una teoria o di un metodo, districandone l'idea profonda dall'avventizio che le si accompagna, « ed ogni generalizzazione vitale inizia in questo modo »[71] (nonostante rappresenti una ' figura ' differente da quella descritta in precedenza, benché Le Roy non sembri avvedersene). Si ritrova invece, in una versione meno sciatta, l'idea di generalizzazione teorizzata da Hadamard a proposito del calcolo funzionale: infatti la generalizzazione del tipo considerato prosegue spesso nel trasporto del complesso operatorio, « astratto e separato dalle combinazioni anteriori che lo trasportavano », in una nuova regione formatasi successivamente, « la forma teorica suscitando per cosí dire una nuova materia definita dalla condizione di poterne essere rivestita »[72]. Ma per quanto grande sia la seduzione esercitata dalla semplicità ottenuta attraverso simili procedimenti, la bellezza logica e la mera eleganza del formalismo non sono criteri sufficienti a garantire la verità della matematica. Finora si è rinvenuta una serie di motivazioni dell'opera generalizzatrice immanenti alla scienza che le accoglie: occorre tuttavia configurarne una sorta di ' necessità '. La chiave, ancora, ci è offerta dall'esame di una ' generalizzazione ', quella rappresentata dai numeri complessi: « simboli ineluttabili (...) di una generalizzazione ad un tempo necessaria e, come sembrava, impossibile, (...) essi s'imponevano alla maniera di fatti misteriosi. Per un lungo periodo ci si serviva di loro senza capirli, come se fossero un utensile magico »[73].

[69] *Ibid.*, p. 279.

[70] Il percorso generalizzante viene descritto nei seguenti termini: di fronte alla nozione d'integrale data da Riemann, Lebesgue ha iniziato « a ridurla alle sue funzioni operatorie essenziali, cioè a dedurre dalla definizione nominale primitiva una semplice definizione per postulati, ristretta all'enumerazione delle proprietà necessarie e quindi sbarazzata da ogni restrizione inutile, per risalire in seguito da questa definizione puramente descrittiva ad una definizione costruttiva nuova, piú generale appunto perché l'essenza operatoria ne era stata preliminarmente isolata allo stato puro » (*ibid.*).

[71] *Ibid.*

[72] *Ibid.*

[73] *Ibid.*, p. 297.

Sono le caratteristiche di un ' fatto matematico ': esigenza impellente, esso obbliga a una risoluzione che lo immetta nella trasparenza del sapere, sottraendolo all'aspetto enigmatico con cui si presenta. « Gli immaginari non si *deducono* dalla scienza anteriore, ma nondimeno sono *reclamati* da questa come condizione della propria vita e del proprio progresso » [74]. Impongono dunque una nuova stipulazione, ma non basta costruire in proposito dei concetti non contraddittori. Perché questi acquisiscano diritto di cittadinanza in matematica occorre che attecchiscano sull'organismo preesistente, che siano fecondi. Di tutto ciò non possiamo essere certi in anticipo: inizialmente un nuovo concetto non è che « una sintesi artificiale, risultato di un accostamento arbitrario e fortuito di concetti anteriori » [75]. Non c'è che un metodo per valutarne il pregio: metterlo in pratica, ' provarlo ' attraverso le sue conseguenze. Il riscontro che si ottiene in tal modo si delinea come un'effettiva esperienza, « un procedimento interrogativo del pensiero che sottomette le sue vedute al verdetto di un evento » [76]. I ' buoni ' concetti, dunque, assumono l'aspetto di fatti naturali venuti dal di fuori e « preesistenti in qualche modo alla loro spiegazione » [77]: sembrano reclamati, come un'esigenza inevitabile, dai principî che li precedono senza poter essere raggiunti da questi per via deduttiva. « L'opera acquisita della scienza, ad ogni momento della sua storia, è gravida di un implicito predeterminato » [78], che una volta venuto alla luce si presenta come un fatto obiettivo, indipendente dai nostri procedimenti di studio. L'irrevocabile urgenza con cui si annuncia rivela una smagliatura interna al sapere, nel senso che l'esperienza che gli fa riscontro va intesa come genuinamente matematica e non consiste « nella consultazione di una realtà trascendente la teoria in questione, in un confronto di idee con dati esterni al sistema che queste formano » [79] (con cui Le Roy sembra voler prendere le distanze dall'ordinario ' realismo '). Un fatto matematico, in altre parole, non è un fenomeno eterogeneo rispetto al sistema che lo riceve, ma è l'espressione di una sua funzione interna, di una sua esigenza immanente: la v e r i t à del fatto riposa precisamente su queste

[74] *Ibid.*
[75] *Ibid.*, p. 299.
[76] *Ibid.*, p. 300.
[77] *Ibid.*, p. 299.
[78] *Ibid.*, p. 302.
[79] *Ibid.*, p. 305.

radici implicite ed è rivelatrice della dignità del problema che ad esso corrisponde. Non si tratta fin qui, tuttavia, che di un esordio di verità, perché la sua forma compiuta non sarà ottenuta se non attraverso « il riassorbimento del fatto da parte dello spirito, la sua risoluzione integrale alla luce di un'analisi esplicita » [80].

Riassumendo, abbiamo dei ' fatti ' che rappresentano necessità del sapere a cui occorre dare risposta, e la soluzione del problema che essi esprimono si configura in termini ' sperimentali '. Attraverso un ' ragionamento bastardo ' se ne può ricavare la controprova: gli ' scacchi ' in cui il matematico incappa nella ricerca di una soluzione sono infatti molto istruttivi in proposito, « perché manifestano la resistenza della realtà matematica alle nostre intenzioni operatorie » [81] rivelando l'inadeguatezza dei metodi disponibili. Sembra in conclusione che Le Roy pensi alla consacrazione del successo come al contrassegno definitivo della ' verità ' di una nozione: questa non si ottiene, in effetti, che successivamente al riconoscimento dei servigi che la nuova nozione è in grado di rendere. Non è dunque sufficiente la sola conformità formale nella risposta al problema considerato: la non contraddittorietà di una nozione conferisce ad essa semplicemente un « rudimento d'esistenza » [82]. La sua verità si misura invece nella ricchezza del « sistema di connessioni di cui il termine considerato rappresenta il centro »: si avranno da una parte « connessioni implicite producenti questa necessità di emergenza caratteristica di ciò che abbiamo chiamato ' fatto ' », dall'altra connessioni esplicite che ne costituiscono il ' riassorbimento ' e che — inattese e per questo tanto piú obiettive — « si stabiliscono tra problemi e concetti fino ad allora giudicati completamente distinti e indipendenti », « parentele improvvise rivelate tra dominî che sembravano lontani l'uno dall'altro » [83].

Nell'elezione di questo criterio di verità (di cui una versione analoga era stata proposta da Brunschvicg a conclusione di *Les étapes de la philosophie mathématique*) si conclude la vicenda della generalizzazione proposta da Le Roy: occorre tuttavia ispezionarne gli antecedenti, ossia le ' idee ' che ne sorreggono la trama. Una generalizzazione si compie, come abbiamo visto, nell'approntamento di una nuova convenzione, ri-

[80] *Ibid.*, p. 313.
[81] *Ibid.*, p. 315.
[82] *Ibid.*, p. 323.
[83] Tutte le citazioni si riferiscono alla pagina 325 (*ibid.*).

chiesta in qualche modo dalle conoscenze che la precedono: l'introduzione di un concetto è l'indicazione di un « complesso ideale » [84] a cui è riducibile il suo significato. La definizione che lo pone in essere è dunque costitutiva del proprio oggetto e non descrittiva di un dato esterno: stipulandola, non s'intende « *spiegare* una nozione confusa in precedenza presa a prestito dall'esperienza » [85], bensí esprimere « l'atto attraverso cui ci diamo un oggetto nel pensiero » [86], indicare cioè il significato che si riserva ad una parola. Le definizioni si presentano pertanto come « puramente operatorie » [87], dal momento che esse non intendono rappresentare un oggetto (reale o ideale) che in qualche modo preesisterebbe loro, potendolo fare, tutt'al piú, sotto forma di esigenza, come s'è visto; esse invece ' generano ' un oggetto che non ha esistenza al di fuori della posizione che impone un certo gruppo di operazioni: attraverso le definizioni « si può dire che lo spirito fabbrica delle essenze che nello stesso tempo pone, ben isolate e ben delimitate, nel suo campo concettuale senza che nulla possa sfuggirgli » [88].

Ma in che cosa consistono queste ' essenze '? In matematica pura « non ci si interessa che a *forme di relazione*, a *rapporti* razionali, e per nulla ai *supporti* immaginabili » che non vengono utilizzati se non « a titolo di notazioni abbreviative, figurate, metaforiche » [89]. Se, per esempio, nella presentazione di una teoria i postulati sono gravati da immagini spaziali (« che si giudicano particolarmente idonee a giustificarli di fronte all'intuizione ») [90], ciò non deve indurre a pensare che simili orpelli svolgano un ruolo effettivo nel ragionamento, giacché è sempre possibile affrancarsene, « prendendo la tavola dei postulati necessari come costituente la definizione astratta dell'operazione considerata in se stessa » [91]. Tutto è dunque riconducibile alle operazioni « che si eseguono su simboli di cui non si considera in alcun modo la capacità di significazione concreta » [92]: l'oggetto di studio è per-

[84] *Ibid.*, p. 71.
[85] *Ibid.*, p. 73.
[86] *Ibid.*, p. 72.
[87] *Ibid.*, p. 76.
[88] *Ibid.*, p. 91.
[89] *Ibid.*, p. 85.
[90] *Ibid.*, p. 82.
[91] *Ibid.*, spaziatura nostra.
[92] *Ibid.*

tanto l'operazione stessa « indipendentemente da ogni materia a cui possa venir applicata » [93]. In effetti la matematica pura ha come proprio argomento « non una materia, ma un certo tipo di attività intellettuale » [94], e si configura come un edificio costituito da piani operatorî sovrapposti, in corrispondenza a ciascuno dei quali certi elementi funzionano da ' materia '. Ma se « se ne scruta l'intima struttura, essa si risolve in un prodotto di operazioni preliminarmente effettuate » [95]. Pertanto, « la funzione di materia si riduce ad una semplice differenza di livello nell'edificio operatorio, *materia* essendo qui sinonimo di *risultato anteriore consolidato*, assunto come elemento di un nuovo calcolo » [96]. Alcuni elementi funzionano dunque ad un determinato stadio in qualità di materia rispetto a certi altri che rivestono il ruolo di forma (che diverrà a sua volta ' materia ' « ad un'età ulteriore dell'elaborazione ») [97], ma gli uni e gli altri si risolvono in ogni caso in costruzioni operatorie, « benché con una differenza di data logica » [98].

Ciò che la matematica considera in ogni concetto è cosí « esclusivamente la sua *funzione logica*, ossia il ruolo operatorio che esso assume, la maniera in cui si comporta nel corso del ragionamento o del calcolo, in breve la possibilità d'azione che esso offre allo spirito » [99]: ciò in cui è racchiusa la sua essenza matematica. Ne segue la possibilità di rinvenire apparentamenti piú o meno stretti attraverso le invarianze che sopravvivono ai mutamenti dei ' supporti ' di determinate operazioni: « cosí due concetti apparentemente distinti vengono identificati quando sostengono gli stessi rapporti, quando sono impegnati nelle stesse relazioni, quando possono essere sostituiti l'uno all'altro senza che cambi la forma di queste relazioni o di questi rapporti, in una parola quando essi possiedono la stessa natura operatoria » [100].

Per quanto tali identificazioni non paiano patire dell'assetto gerarchico in cui è organizzato l'edificio matematico, quest'ultimo annuncia la necessità di un rinvio a un ' fondamento ' che ne fornisca i materiali

[93] *Ibid.*, p. 83.
[94] *Ibid.*, p. 80.
[95] *Ibid.*, p. 84.
[96] *Ibid.*
[97] *Ibid.*
[98] *Ibid.*
[99] *Ibid.*, p. 85.
[100] *Ibid.*, p. 87.

primitivi: le definizioni matematiche sono state dette ' puramente operatorie ' e ciò sta a significare che « ciascuna di esse costituisce il proprio oggetto attraverso un gruppo di operazioni eseguite su oggetti anteriori: l'essere del nuovo oggetto consiste in queste operazioni » [101] (il che permette a Le Roy di formulare riserve a proposito delle costruzioni ' transoperatorie ' che generano paradossi) [102]. Ma questo criterio può essere evidentemente applicato solo agli stadi evoluti, ad una matematica, cioè, già in possesso di una materia preliminarmente elaborata, perché, di anteriorità in anteriorità, si dovrà pur giungere ad un livello d'arresto. D'altra parte, se ' definibilità ' significa riducibilità ad un insieme di operazioni si dovrà postulare l'esistenza di ' indefinibili ', ed a questo proposito « la nozione di numero intero » si propone come « lo schema essenziale dell'azione operatoria elementare in matematica pura », sintetizzandone « il piano e la legge » [103], dal momento che essa assume questa nozione « come unico elemento generatore » a partire dal quale è possibile ricostruire l'intero edificio (sulla cui natura complessiva ritorneremo) « senza ricorso a nessun'altra materia » [104]. È precisamente sulla base di questo disegno genetico (il prodotto per altro di una ' generalizzazione ' storica, qui elevata a piano generale della matematica) che i numeri interi possono esser prospettati a titolo di ' costituenti primordiali ', « risultati acquisiti e divenuti semplici », per quanto « frutti di una lenta maturazione evolutiva » [105]. Se con essi si è di fronte ad un'idea « matematicamente prima e indecomponibile » che funziona come « una sorta d'atomo » [106] del discorso matematico, gli interi rappresentano tuttavia un arresto provvisorio nella regressione che ci ha condotto ad individuarli, perché è possibile concepire altre vie che la prolunghino, conformi a differenti ' punti di vista ' (come quello logico o quello psi-

[101] *Ibid.*, p. 102.

[102] « Le vere definizioni dell'analisi non assomigliano dunque alle definizioni classificatrici per genere e differenza; esse esprimono sempre una costruzione operatoria diretta, univocamente determinante perché generatrice del suo oggetto » (p. 94). Tale concezione dell' ' operatorio ' sembrerebbe corrispondere alle vedute di Borel: ma, da parte l'esame dei paradossi, Le Roy non se ne serve per avanzare riserve — come aveva fatto appunto Borel — sui presupposti della teoria degli insiemi (assioma della scelta e ' esistenza ' degli aleph). Cfr. la successiva nota 126.

[103] *Ibid.*, p. 114.

[104] *Ibid.*, p. 104.

[105] *Ibid.*, p. 105.

[106] *Ibid.*

cologico), per quanto a parere di Le Roy « non esistono atomi logici assoluti che non siano a loro volta centri di relazioni anch'esse analizzabili » [107]. In questa regressione senza fine non ci si può dunque che arrestare momentaneamente, in concomitanza di un determinato stadio del pensiero: ma qui ci si sta occupando degli ' indefinibili ' relativi all'ordine specificamente matematico, ed i numeri interi rappresentano al proposito il limite di una riduzione che si potrebbe continuare soltanto « a condizione di abbandonare il punto di vista caratteristico della scienza in causa » [108]. Come si giunge allora alla determinazione di questo livello d'arresto? Da una parte attraverso una constatazione intuitiva grazie alla quale i numeri interi s'impongono in qualità di ' indefinibili ' perché « nulla di piú chiaro si offre per la loro spiegazione » e perché, del resto, « lo spirito non prova alcun bisogno di chiarirli » [109]. Ma a tutto ciò va aggiunto un controllo retrospettivo, « un criterio di soccorso (...) che autentica le nozioni iniziali e ne garantisce il valore in quanto tali, secondo la loro potenza architettonica, la loro facoltà di fornire un corpo di materiali necessari e sufficienti per l'opera di costruzione che si sta progettando » [110]: se la prova di sufficienza non può essere ottenuta che in seguito all'instaurazione effettiva del sistema, se ne può scorgere in anticipo la necessità « se si dimostra la presenza inevitabile delle nozioni considerate in tutti gli atti del discorso ulteriore » [111].

Sembrerebbe a tutta prima che Le Roy non stia descrivendo niente altro che un lavoro di assiomatizzazione (secondo una concezione per altro antiquata): ma vedremo che si tratta d'altro, perché nonostante chiami ' postulati ' i principî a cui giunge avrà la pretesa di risolvere il tutto nel regno delle ' idee '. Non si può spiegare altrimenti la natura della soluzione che offre in proposito: i ' dati immediati della coscienza operatoria » vengono ricondotti all'azione combinata di due ' principî ', racchiusi nella nozione stessa di numero intero « ridotta alla sua funzione logica » [112] (con cui è detto tutto sulla pregnanza di questa locuzione), e che rappresentano « gli atti dello spirito » che « la genesi di questa idea

[107] *Ibid.*, p. 106.
[108] *Ibid.*, p. 107.
[109] *Ibid.*, p. 108.
[110] *Ibid.*, p. 109.
[111] *Ibid.*
[112] *Ibid.*, p. 114.

tipica »[113] esige. Si tratta da una parte della nozione di ' unità ' (« simbolo di posizione pura e semplice, ovvero di presenza logica non qualificata »)[114], dall'altra di un appello sommario alla « attività dello spirito in quanto potere di calcolo », alla sua « attitudine a compiere certi atti operatori designati dalle parole *posizione, associazione, selezione, ordinamento, sostituzione* ... congiunta a quella di reiterare senza fine ciascuno di questi atti »[115]. L'unità « non è che il simbolo vuoto, uno schema d'esistenza astratto senza contenuto proprio, una forma che diviene materia perché essendo semplice non vi si trova nulla da comprendere »; non va tuttavia confusa con il numero *1*, perché essa non rappresenta che « quella che si potrebbe chiamare l'*identità* di un individuo logico ridotto alla sua *posizione*, ossia la proprietà di essere presente di fronte al pensiero »[117]; « ultimo residuo dell'astrazione, essa non potrebbe essere definita in alcun modo »[118]: la sua funzione consiste nel sostituire agli occhi del matematico « la materia operabile di cui praticamente si disinteressa per non occuparsi che dell'operazione stessa »[119]. Atomo logico, « essa sfugge inoltre alla contraddizione in virtú » — niente di meno — « della propria semplicità »[120].

Quanto agli altri « gesti operatorî che, dispiegandosi, generano il numero »[121], essi sembrano evocare un rudimentale apparato insiemistico: cosí il « potere di associazione » permette di « raggruppare sotto uno stesso sguardo logico diverse unità coesistenti »[122], mentre l'idea di sostituzione o corrispondenza consente la loro messa in ordine; d'altro canto, nella possibilità di reiterazione senza fine di questo atto (un ' postulato ' che non esprimerebbe altro che « il divenire logico è omogeneo »[123]) è racchiusa la fonte primitiva dell'infinito matematico; l' ' astrazione elettiva ' ci fornisce infine l'idea di ' intero qualsiasi ' quanto quel-

113 *Ibid.*
114 *Ibid.*
115 *Ibid.*, p. 115.
116 *Ibid.*, p. 116.
117 *Ibid.*
118 *Ibid.*
119 *Ibid.*, p. 114.
120 *Ibid.*
121 *Ibid.*, p. 127.
122 *Ibid.*, p. 116.
123 *Ibid.*, p. 125.

le di ' alcuni interi ' o ' tutti gli interi ', giungendo cosí a definire raggruppamenti parziali di queste entità in seno alla loro totalità (« attraverso l'indicazione di un carattere operatorio specifico » [124]).

Se ci siamo dilungati su queste ' descrizioni ' è perché, in fin dei conti è su questa carpenteria che vien fatta riposare la ' verità ' dell'intero edificio. Resta tuttavia da chiedersi in che cosa consistano: non si tratta di definizioni, dal momento che prendono in considerazione degli ' indefinibili '; sembrerebbe piuttosto di esser di fronte ad una trascrizione spiritualista della teoria degli insiemi [125], ma non si potrebbe in nessun modo considerarla una sua divulgazione edulcorata, perché essa resterebbe del tutto involontaria (altro, infatti, è il valore riservato da Le Roy alla teoria degli insiemi in quanto tale [126] mentre qui si ha a fare con i numeri interi, con buona pace dell'indifferenza della ' funzione logica ' rispetto alla materia a cui viene applicata). Non si tratta neppure di una versione discorsiva di qualche assiomatizzazione dell'aritmetica, che fornirebbe la definizione implicita delle entità in questione: il sistema di Peano condensa in effetti « tutti i principî della matematica pura » [127], per quanto non convenga ' attardarsi ' sull'indipendenza e l'irriducibilità degli assiomi, che non sono affare della filosofia (sotto la cui giurisdizione ricade dunque la giustificazione dei ' postulati ' proposti da Le Roy [128]), ma un'impostazione di questo tipo a suo parere presta il

124 *Ibid.*, p. 126.

125 Ecco il riassunto dei « dati primordiali » che Le Roy pone a fondamento dell'Analisi: « 1° le unità simboliche: elementi o materiali primi dell'edificio; 2° il raggruppamento collettivo; 3° la ripetizione del raggruppamento e le operazioni riduttrici che permettono l'addizione di pluralità; 4° l'idea di corrispondenza; 5° il potere d'ordinamento; 6° quello di reiterazione senza fine; 7° quello di astrazione elettiva » (p. 127).

Se si confrontano con i postulati di Zermelo per la teoria degli insiemi (1908), se ne avrà in effetti un soddisfacente (per quanto fortuito) corrispettivo, salvo tutt'al piú l'assioma della scelta.

126 La teoria degli insiemi non viene considerata da Le Roy nella sua generalità (nel senso delle funzioni ricostruttive o fondanti che potrebbe assolvere), ma come branca particolare della matematica dedicata alla ' analisi dell'infinito '; in tal modo non ne viene contestata la legittimità, ma ne è semplicemente circoscritta la zona d'intervento (con un'indicazione sommaria delle ' difficoltà tecniche ' che incontra). Cfr. pp. 223-224 (*ibid.*).

127 *Ibid.*, p. 186.

128 I quali « formano un organismo, ossia un gruppo di funzioni solidali che si sviluppano mutualmente » (p. 128). Forse per questa pretesa indissolubilità sarebbe inconcepibile avanzare questioni d'indipendenza (per altro difficilmente districabili se si considera la natura di ciò che potrebbe costituirne la ' dimostrazione ').

fianco a obiezioni che ci paiono molto significative in rapporto a quello che, invece, è il suo punto di vista: in primo luogo la definizione per postulati « non assicura né l'esistenza, né soprattutto l'unicità del sistema d'oggetti a cui essa si riferisce »; inoltre, non è accertato che « il corpo dei postulati sia esente da contraddizioni interne » (mentre s'è visto a quali criteri si richiamasse l'assicurazione attuata in proposito dalla filosofia!); infine, « o gli indefinibili non hanno alcun senso, il che è poco soddisfacente e non potrebbe bastare, oppure essi ricevono il loro senso dall'intuizione », ammettendo in questo caso in via preliminare l'idea di numero intero, ossia « tutto ciò che si trattava di costruire » [129].

A questo Le Roy può opporre un'idea ' chiara e distinta ': « i nostri postulati — afferma — non fanno che tradurre sotto forma astratta un ricorso all'esperienza immediata », da cui scaturirebbe, appunto, il loro « valore incontestabile » [130].

In effetti, lo stesso percorso regressivo che abbiamo seguito denuncia l'impossibilità di arrestarsi a delle convenzioni, ad ' indefinibili ' privi di senso, perché il disegno gerarchico a cui l'intero corpo del sapere matematico è sottomesso reclama dei ' significati ' quali suoi costituenti ultimi. È così proprio questo impianto genetico ad invocare una base contenutistica: la ' definizione per postulati ' non può assolvere questo compito (unicità a parte), per la singolarità del suo argomento, perché in questo caso si tratta dei costituenti primordiali della scienza, uno stadio, cioè, che non può, a differenza degli altri, ottenere la consacrazione della propria ' verità ' dal modo in cui s'instaura in seno all'edificio che lo precede, dal momento che non c'è nulla che gli sia anteriore. I ' postulati ' di Le Roy non fanno altro, a detta del suo autore, che assicurare la possibilità di certe costruzioni: ma non c'è nessun sistema operatorio a cui potersi appoggiare che le precorra e le preannunzi a titolo di propria ' esigenza '. Sono pertanto queste stesse costruzioni ad essere dotate di ' senso ' e portatrici di ' certezza ': se i ' dati immediati ' si sono rinvenuti « nella coscienza dei poteri dello spirito che la genesi [della nozione di numero intero] suppone » [131], è appunto a questa coscienza che va ascritta la loro verità, non al fatto che essi permettano la reinstaurazione dell'intero edificio, perché attenersi a quest'unico criterio retrospettivo significherebbe consegnare la verità complessiva di questo sapere

[129] Le citazioni si riferiscono alle pp. 186-187.
[130] *Ibid.*, p. 130.
[131] *Ibid.*, p. 125.

alla contingenza della storia che l'ha coltivato e tramandato nella sua forma attuale.

Cosí il sistema degli interi differisce per natura da ogni altro stadio della matematica e, come tale, dal momento che la sua verità è fatta riposare su ' facoltà dello spirito ', esso non può configurarsi se non come ' prodotto naturale ' dell'intelligenza: in tal modo la filosofia di Le Roy, ben lontana dall'essere ' convenzionalista ' (come venivano viceversa interpretati i suoi celebri interventi di fine secolo sulla « Revue de Métaphysique et de Morale » [132]), può esser fatta rientrare in una corrente di pensiero che si riassume in una sorta di ' naturalismo ' a cui è possibile ricondurre le concezioni di matematici come Dedekind e Poincaré, per esempio, e che consiste in un richiamo ultimo alle risorse interne dello spirito come artefice della sua stessa materia, come qualcosa che imporrebbe alla scienza il suo ritmo necessitante (perché, a questo livello per lo meno, non sono date possibilità di scelta tra differenti ' convenzioni '): agli occhi di Le Roy la ' matematica pura ' sarebbe dunque connaturata alla forma dell'intelligenza, a cui si arresterà, di conseguenza, la regressione verso i primi ' principî ', la quale, per parte sua, se va piú in profondità di un'assiomatizzazione dell'aritmetica, è perché tenta la loro giustificazione attraverso un'argomentazione che non è piú matematica, ma assume l'aspetto di una sconcertante ' deduzione trascendentale '. I principî della matematica pura coinciderebbero pertanto con quelli del pensiero esatto ed in quanto tali sono riconoscibili come portatori di una verità intrinseca: ma il livello dei fondamenti cosí rinvenuto non rappresenta — ci era stato detto — che una ' tappa provvisoria ' di un lavoro di scavo prolungabile, in via teorica, indefinitamente. Tuttavia, il fatto che questo stadio sia dotato di un senso proprio, che non necessita di giustificazioni esterne, gli fa assumere un ruolo di raccordo tra due distinti ordini d'interesse: verso l'alto la matematica, che si eleva di generalizzazioni in generalizzazioni senza perdere per questo il legame con le proprie radici, verso il basso una logica che ispeziona gli antecedenti del discorso matematico, assumendo come proprio oggetto di studio la forma spoglia del discorso deduttivo. Ma se questa logica

[132] Le Roy, *Science et Philosophie*, « Revue de Métaphysique et de Morale », VII (1899) e VIII (1900); Le Roy e G. Vincent, *Sur la méthode mathématique*, *ibid.*, II (1894). Si veda anche L. Couturat, *Contre le nominalisme de M. Le Roy* e la relativa *Réponse a M. Couturat* di Le Roy (*ibid.*, VIII, 1900).

è in grado di rivelare « i sofismi incoscienti » o « i postulati nascosti » [133] nell'argomentazione matematica, non può tuttavia pretendere ad un'anteriorità rispetto alla matematica nella direzione dei suoi fondamenti, rimanendo viceversa « essenzialmente retrospettiva » [134], ossia costruita successivamente alla matematica e rimaneggiata in vista di renderne conto. Cosí, mentre quest'ultima è scienza autonoma che non ne richiede un'altra che l'autentichi, la ' logistica ' viene costruita « in seguito a un esame delle matematiche supposte anteriormente costruite » [135], e non può vantare il rigore delle sue dimostrazioni se non quando « riconosca, in anticipo, lo stesso rigore ai procedimenti del pensiero matematico » [136]. Pertanto, all'opera di ' aritmetizzazione ' non può secondo Le Roy far seguito quella di ' logicizzazione ' che configuri una sorta di « prearitmetica » da cui sarebbe fatta dipendere la verità della matematica: anzi, come s'è visto, accade esattamente il contrario ed il raccordo rappresentato dai ' primi principî ' è chiamato cosí a conferire senso in ambedue le direzioni.

Ora, questa ' soluzione ' — messi da parte i criteri di ' evidenza immediata ' — è resa evidentemente possibile dall'avvenimento storico che la garantisce: l'aritmetizzazione dell'analisi, infatti, non si limita a fornire un modello di generalizzazione (a costituirne semplicemente una ' figura '), ma sottomette la matematica a un disegno genetico complessivo ricondotto a un'unica base contenutistica. Nulla è piú lontano, dunque, dalle vedute epistemologiche di Le Roy dell'idea di una matematica astratta, nulla gli è piú estraneo di una concezione ' formalista ', perché se una vaga consonanza a quest'ideale esplicativo poteva apparire agli stadi superiori, il tutto veniva interpretato (in conformità al criterio di ' autenticazione ' di cui s'è detto) sulla falsariga di questo riduzionismo che, regredendo di livello in livello lungo la scala gerarchica, riporta ogni costruzione possibile alla ' verità ' di quella fonte primitiva che risplende di luce propria. Per questa ragione Le Roy può pronunciarsi, in uno stile di disimpegno molto francese, per l'inutilità (per il matematico) di oltrepassare la nozione di numero intero addentrandosi in speculazioni che facciano retrocedere il livello dei fondamenti [137], e può concludere,

[133] *Ibid.*, p. 55.
[134] *Ibid.*, p. 63.
[135] *Ibid.*, p. 68.
[136] *Ibid.*, p. 69.
[137] Cfr. p. 63 (*ibid.*).

con Poincaré, che con l'aritmetizzazione dell'analisi il rigore definitivo è stato conseguito [138].

L'opposizione prospettata da Hilbert tra spiegazione genetica e spiegazione assiomatica trova qui un'espressione eloquente: non solo Le Roy dichiara inconcludente la seconda, come abbiamo visto, in relazione ai costituenti primordiali della scienza, non solo tenta di ricavare dalla prima una lezione filosofica configurandone una portata ' gnoseologica ' ed affrancandola in questo modo dalla storia da cui scaturisce, ma ne subisce la forza d'attrazione perfino nella cernita del materiale d'osservazione. Infatti, non è soltanto la cadenza del discorso a rispettarne i dettami o a costringervi i ' dati di fatto ', ma anche la delimitazione del soggetto: la ' matematica pura ' (per la quale Le Roy, come Comte e Bourbaki, usa il singolare francese) non è che un sinonimo dell'analisi « in senso lato » [139], in cui far rientrare tanto l'aritmetica e l'algebra, quanto il calcolo infinitesimale e la teoria delle funzioni; è lo studio delle « leggi e [del]le proprietà intrinseche del numero », a cui si contrappongono le matematiche applicate, il plurale essendo richiesto in questo frangente dalla molteplicità dei loro oggetti « malgrado l'uniformità del metodo ». Alla geometria è invece riservata una posizione intermedia: partecipando ad entrambi gli ordini, essa accusa « caratteri di transizione » [140]. Questa scienza sembra infatti debitrice nei confronti di una materia estranea (inizialmente, per lo meno) alle sue operazioni: l'intuizione spaziale, da cui dipende, è una sorta di « percezione idealizzata che verte su forme limite » [141], analizzando l'ordinaria intuizione sensibile benché ben presto la oltrepassi attraverso l'introduzione di ' idealità '. Evidenti echi delle concezioni poincareiane paiono ispirare queste vedute, per quanto gli esiti saranno distinti: per Le Roy, infatti, se si prescinde dalla genesi nelle nozioni geometriche fondamentali, se si riducono alla loro ' funzione logica ', è il meccanismo deduttivo che finirà col governare questa scienza ed a questa condizione (ragionando non piú « sulle figure ma sulla definizione delle figure » [142]) la geometria diverrà una scienza propriamente ' matematica ' in cui « le immagini che l'intuizione spaziale vi apporta non ser-

[138] Cfr. p. 45 (*ibid.*).

[139] *Ibid.*, p. 25.

[140] Le citazioni si riferiscono alla p. 10 (*ibid.*).

[141] *Ibid.*, p. 17.

[142] *Ibid.*, p. 20.

vono che da simboli per illustrare sistemi di connessione astratta »[143]. Ma di che connessioni si tratta? Da capo, di « relazioni ordinali o quantitative »: pertanto, « la possibilità di una geometria analitica (in senso lato) [resta] il fondamento segreto della geometria ordinaria in quanto scienza di deduzione pura »[144]. Tramite quest'argomentazione un po' frettolosa la geometria viene ricondotta all'analisi, e non si potrà considerarla dotata di « un'esistenza distinta e di un significato proprio » se non facendo entrare in conto l'intuizione nella genesi delle sue premesse. Dunque, se si vuole scorgere in essa qualcosa di differente dall'analisi « espressa attraverso metafore di estensione »[145], occorre addebitarle l'idea di spazio quale prerequisito essenziale, mentre è precisamente l'affrancamento da vincoli di questa natura a contraddistinguere la ' matematica pura ', dal momento che questa è fautrice, come sappiamo, del proprio oggetto ed indipendente da qualsiasi obbligazione esterna (grazie all'artificio con cui le è stato accordato il possesso preliminare di un argomento).

Questa svalutazione aprioristica della geometria, per quanto sorprendente, è significativa se si considera che proprio questa scienza costituisce il luogo di collaudo dell'assiomatica, sulle cui vicende Le Roy può dunque sorvolare; non è inoltre casuale il fatto che egli non faccia parola (per motivare la sua rimozione) della pluralità di geometrie concepibili, del criterio, cioè, che Poincaré adottava come spartiacque tra il vero e il convenzionale.

Se un pensiero strutturale deve prendere forma, noi non lo assumiamo qui se non in una versione ' ideologica ' ben poco costringente, ascrivendogli retrospettivamente determinate ascendenze — matematiche ed epistemologiche — a scapito di altre: ma sono proprio queste, come s'è visto, ad essere estranee a quelle che sembrano motivare le concezioni di Le Roy. La consonanza con lo ' strutturalismo ' di alcune sue formule rimane pertanto occasionale, se non equivoca, perché esse non rappresentano né la *vulgata lectio* né la riduzione metafisica di una insorgenza metodica di cui rendere conto o della quale s'indovinano i contorni per una sorta di divinazione epistemologica: l'ideologia leroyiana va imputata piuttosto alla concomitanza di altri fattori, il cui sviluppo appare inestricabile se è possibile mettergli in conto il nomi-

143 *Ibid.*
144 *Ibid.*
145 *Ibid.*

nalismo ' radicale ' dei suoi primi scritti e la presa di distanza poincareiana che fece loro seguito, il prestigio dell'analisi e l'ostilità al logicismo della comunità matematica francese, le concezioni epistemologiche degli analisti parigini, il bergsonismo e preoccupazioni d'ordine religioso. Ma su quest'ultima traccia abbandoniamo la pista che ci condurrebbe nel territorio poco rassicurante della p a t o l o g i a del discorso filosofico, in cui preferiremmo evitare d'addentrarci.

Nel caso di un articolo dedicato nel 1911 da Henri Dufumier esplicitamente alla ' generalizzazione matematica ' [146] dovremmo invece essere dispensati dalla ricerca di motivazioni d'ordine eterogeneo all'argomento in esame, per lo meno a stare alle dichiarazioni cautelative del suo autore: qui non ci si prefigge altro che uno studio ' positivo ' della relazione del generale e del particolare alla luce delle nuove elaborazioni teoriche che la matematica presenta, imponendo un riesame rispetto alla soluzione che forniva in proposito la logica classica. È dunque all'« osservazione diretta del procedimento attraverso cui la matematica moderna si è elevata di astrazione in astrazione » [147] che occorrerà attenersi, per desumere da essa una lezione ' obiettiva '.

Eccoci dunque trasportati ' sul campo ' per constatare l'inadeguatezza dello schema tradizionale della generalizzazione rispetto a quelle che s'effettuano in matematica, che restano incomprensibili quando venga rispettato il punto di vista ' scolastico ': tre di queste (descritte dai numeri, dal calcolo geometrico e dalla teoria dei gruppi) saranno allora chiamate a chiarire cosa significhi ' essere generale '.

A proposito dei numeri, la presentazione che dà Dufumier risponde alla consueta linea interpretativa: essa si compie affrancando progressivamente le operazioni da impossibilità d'esecuzione attraverso l'introduzione di nuove entità. Rendendo allora alla matematica « lo spirito che la anima », quel che si ricava è che « non è la nozione, ma l'operazione ad essere il vero oggetto della generalizzazione matematica » [148]: in questo caso i numeri naturali vengono assunti come dato di partenza, ma le conseguenze che Dufumier ne ricava procedono in senso contrario rispetto al ' fondamento di verità ' dell'impianto genetico prospettato da Le Roy. Che cosa sono infatti questi oggetti? « Nient'altro che segni,

[146] H. Dufumier, *La généralisation mathématique*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XIX (1911).

[147] *Ibid.*, p. 724.

[148] *Ibid.*, p. 729.

rappresentanti sistemi di entità qualsiansi e tra le quali esistono due modi di composizione »[149] sui quali poggia per intero la loro definizione: « tutto l'essere matematico dei simboli studiati consiste nella possibilità di figurare nella tavola di composizione dell'insieme »[150]. Non è tuttavia un caso se sono detti ' naturali ': a questo livello, *infatti*, si attribuisce loro « una sorta di esistenza individuale e concreta ». Ebbene, il processo di ' generalizzazione ' non farà che sciogliere l'operazione dalle limitazioni provenienti da « questa pseudo natura » dei simboli, districandone dall'« unità apparente », esibita dall'intuizione, « il procedimento complesso di costruzione », subordinando in tal modo i simboli all'operazione che, sola, conferisce loro 'esistenza ' matematica[151]. Facendo apparire le condizioni implicite di un'operazione, che fino ad allora restavano sedimentate sotto la « semplicità apparente di un caso particolare »[152], la generalizzazione — lungi dal rendere una nozione sempre piú indeterminata (in conformità all'interpretazione tradizionale) — la approfondisce e la precisa, rivelandone i meccanismi soggiacenti, sostituendo un'operazione « concretizzata » (che l'intuizione ci consegna) con « la sua definizione formale ed esplicita »[153].

Alla stessa conclusione conduce l'esame del ' calcolo geometrico ': « se poteva sembrare seducente fare della geometria una branca dell'analisi », la generalizzazione della nozione di spazio ha proceduto in senso contrario, allontanandosene progressivamente per cercare di allestire « un calcolo specificamente geometrico e in qualche modo autonomo »[154]. Sia i quaternioni di Hamilton, sia l'analisi vettoriale di Grassmann testimoniano lo sforzo che si è dovuto compiere per liberarsi dalle abitudini mentali inculcate dalla pratica geometrica: è invece attraverso l'analisi delle proprietà formali delle trasformazioni spaziali che Hamilton ha tentato di determinare le operazioni che le esprimono e le condizioni da cui dipendono, ed è attraverso un ulteriore affrancamento da ogni intermediazione numerica che Grassmann può approntare un calcolo astratto chiamato ad esprimere le operazioni propriamente geome-

149 *Ibid.*, p. 725.
150 *Ibid.*, p. 726.
151 Le citazioni si riferiscono alla p. 730 (*ibid.*).
152 *Ibid.*, p. 732.
153 *Ibid.*, p. 735.
154 *Ibid.*

triche, che determinate formalmente sono in grado di far « apparire elementi fino ad allora non rilevati » [155].

Come nel caso dei numeri, anche in questo frangente « la generalizzazione si lascia definire come dilucidazione del concreto » [156], come un lavoro consistente nell'esplicitare la ' forma ' di relazioni in precedenza avviluppate nell'intuizione, perché essa tende a « risolvere l'intuizione spaziale — complessa sotto la sua unità superficiale — in un sistema evoluto delle sue condizioni d'esistenza nel pensiero » [157].

Nei lavori piú recenti (si citano tra gli altri Veblen e Kempe), Dufumier trova conferma di questa tendenza: lo scopo che si persegue è sempre quello di stabilire un sistema di elementi « spogliati di ogni proprietà intuitiva », la cui funzione consiste nell'evidenziare la forma della relazione da cui essi vengono definiti.

Si ha dunque a fare con teorie che fanno intervenire « un insieme di elementi raggruppati (*groupés*) sotto il concetto di una certa operazione » [158], consentendole in certo modo d'agire: ma questa constatazione non è ormai che il pretesto (innescato da un'assonanza) per annunciare l'esame di una nozione, quella di gruppo, che si rivelerà capace di illustrare nitidamente il meccanismo della generalizzazione matematica, « in una sorta di esperienza privilegiata » [159].

L'importanza della teoria dei gruppi, in effetti, non è testimoniata soltanto dalla vastità dei suoi interventi: oltre che come strumento di ricerca, essa si è imposta « come il piú generale modo d'esposizione » [160]. Questo mutamento di stile sottintende pertanto un mutamento ontologico: « è l'idea di un'operazione sempre possibile senza restrizioni che definisce l'insieme come gruppo » [161] e gli elementi non esistono che come ' teatro ' di questa operazione, consentendo di attivarla. Secondo questa prospettiva, dunque, ogni loro eventuale ' natura ' non viene presa in considerazione e se due gruppi presentano uno stesso modo di composizione degli elementi (ovvero se sono isomorfi) non vi sarà ragione di mantenere differenze tra di essi: « solo le differenze di forma im-

155 *Ibid.*, p. 746.
156 *Ibid.*, p. 740.
157 *Ibid.*, p. 746.
158 Le citazioni si riferiscono a p. 746 (*ibid.*).
159 *Ibid.*, p. 754.
160 *Ibid.*, p. 747.
161 *Ibid.*, p. 748.

porteranno nella teoria dei gruppi »[162]. Di qui la ricerca di caratteristiche rivelatrici di tali differenze: le decomposizioni gruppali ed i sistemi di generatori rappresentano al proposito nuovi contenuti, nuove condensazioni d'interesse che scaturiscono dal regno delle forme.

Nell'interpretazione di Dufumier, dunque, a generalizzazione compiuta un elemento di novità, precedentemente nascosto, viene fatto emergere: « la forma pura della funzione che definisce la relazione stabilita tra i termini dell'operazione studiata »[163], ed è a questa forma, consegnata all'astratto, che si dedicherà l'indagine. Questo metodo generale d'esposizione delle operazioni matematiche (che ne costituisce, « suivant l'expression allemande », la formalizzazione) risolve a parere di Dufumier la vicenda tra il generale e il particolare: porre la generalità di una forma significherà svilupparne astrattamente la teoria, senza guardare alle sue applicazioni possibili, fatta salva la compatibilità logica delle leggi in questione, mentre particolarizzarla vorrà dire sostituire una costante alla variabile considerata, far intervenire cioè come argomento della relazione (espressa in precedenza nella sua generalità) « termini conosciuti che la verificano concretamente », « oggetti reali del pensiero »[164]: la differenza delle due trattazioni consisterà allora nella differenza attraverso cui accordiamo loro verità.

Si compie cosí il passaggio dal ' generale ' all' ' astratto ': per altro, nell'opposizione tra teoria e modello si prefigura una sorta di differenza ' epocale ' tra un dato iniziale (dominio di contenuti consegnatoci dall'intuizione) ed uno progredito (spurgamento di questo concreto in una sua versione ' formale '), che contraddistingue un lavoro di esplicitazione dei meccanismi costitutivi delle precedenti regioni teoriche e che si accompagna, attraverso la rivelazione di ' forme ', alle loro possibilità di generalizzazione. Non era forse questo che Dufumier intendeva parlando di messa in evidenza di elementi dissimulati, di affrancamento da limitazioni innecessarie o da oscurità indebitamente coltivate dalla consuetudine? Ma la trascrizione in termini di pure forme delle operazioni ' concrete ', se le rende « in qualche modo trasparenti al pensiero »[165], non sembra accompagnarsi necessariamente ad una loro

162 *Ibid.*, p. 749.
163 *Ibid.*, p. 732.
164 *Ibid.*, p. 757.
165 *Ibid.*, p. 756.

maggiore ' generalità ', per quanto (stando per lo meno alla linea interpretativa di Dufumier) sia tramite quella che si aprono vie di generalizzazioni possibili. La ' simulazione ' di un contenuto ' concreto ' attuata dalle ' forme ', con il conseguente discernimento delle componenti costitutive agglomerate nel caso primitivo e separabili in astratto (ed eventualmente ricomponibili in una prospettiva differente secondo i bisogni o la convenienza del momento) è in effetti tutt'altra cosa rispetto alla generalizzazione condotta sul modello aritmetico: esse costituiscono d u e m o d e l l i p e r i l p e n s i e r o corrispondenti alla distinzione hilbertiana tra ordine genetico ed ordine assiomatico. È pertanto possibile disobbligare la messa in forma astratta dagli esiti attraverso cui la si è reperita: lo sbocco in una generalizzazione effettiva non sarebbe in questo caso che una circostanza avventizia, a meno di non riferire il tutto alla ' generalità ' allestita dalla teoria dei gruppi. La separabilità di una ' forma ' rispetto alle sue realizzazioni possibili che si riscontra in questo frangente si accompagna allora ad un ampliamento, su una classe di oggetti, dei caratteri desunti da un dominio particolare (interpretando estensionalmente un sistema d'assiomi), e non piú nell'ampliamento di quel dominio; trattandosi poi della teoria dei gruppi non ci sarebbero questioni di categoricità di cui tener conto, il che per altro non muterebbe i termini del problema, l'isomorfismo consentendo il gioco a una pluralità di concreti che lo realizzano. Ma l'esercizio assiomatico (non si tratta in effetti che di questo) è imputabile a tutt'altre preoccupazioni, ed è precisamente l'opportunità di « una restaurazione dell'idea di generalizzazione » quale suo compimento naturale che, a piú di due decenni di distanza e su un repertorio ben piú ricco ed un modo di fare matematica ormai collaudato, Albert Lautman non vuole riconoscere [166].

Per lui, se la costituzione di teorie astratte può dar luogo, tramite un riferimento estensionale, ad un gioco d'incastro entro generi sempre piú ampi (come è possibile interpretare le successive generalizzazioni della nozione di spazio proposte da Fréchet), l'orientamento assiomatico è assimilabile piuttosto alla dissezione sul concreto operata dalla fisica; si ottengono allora d i s s o c i a z i o n i relative all'incremento del ' livello di precisione ' dell'indagine: un fatto particolare si presenta come risultante dalla concomitanza di altri fatti, appartenenti ad un ordine di

[166] A. Lautman, *L'axiomatique et la méthode de division*, in A. Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Parigi, Union générale d'Éditions, 1977 (p. 291); originariamente in « Recherches philosophiques », 1937.

precisione piú elevato. In matematica tutto ciò non rappresenta semplicemente una metafora, ma riassume circostanze ben note: cosí l'identificazione illegittima di due proprietà può venire invalidata dalla scoperta di un caso che non le verifica simultaneamente (come le funzioni continue non derivabili scoperte da Weierstrass), oppure è possibile rinvenire delle differenze tra elementi che godono di una proprietà comune sottoponendoli ad un trattamento particolare (ne è un esempio la distinzione tra punti singolari essenziali e poli di una funzione analitica). L'approntamento di nozioni astratte è anch'esso suscettibile di un'interpretazione distinta da quella ' generalizzatrice ': « il passaggio dalle nozioni dette ' elementari ' alle nozioni astratte non si presenta come sussunzione del particolare sotto il generale, ma come la divisione o l'analisi di un ' misto ' che tende a far emergere le nozioni semplici a cui questo misto partecipa » [167].

Trent'anni prima anche Brunschvicg aveva parlato di una ' dissociazione ' delle nozioni contrapposto al loro primitivo connubio in forma di implicazione irriflessa: la « rovina dell'imperativo geometrico » [168] conosciuta dall'Ottocento ha testimoniato il frantumarsi di un dato complesso (lo spazio geometrico) in nozioni e discipline distinte. Queste non rappresentano soltanto differenti punti di vista su di uno spazio unico, ma è la stessa concezione di quest'ultimo a venire coinvolta: la sua unità, un tempo postulata, viene cosí a decomporsi in una « frangia di attività intellettuali », il cui limite superiore è costituito dalla rappresentazione analitica del continuo per mezzo della teoria degli insiemi (« che permette allo spirito di oltrepassare la nozione di dimensione » [169]). Se si può constatare in geometria una dissociazione avvenuta tra elementi

[167] « È cosí che l'eguaglianza aritmetica è la sola relazione d'equivalenza tale che la numerazione degli individui di un insieme si confonde con quella delle classi d'individui equivalenti nel senso di questa relazione; allo stesso modo l'idea di moltiplicazione contiene ad un tempo la formazione di prodotti aritmetici e l'azione di operatori su un dominio di elementi distinti da questi operatori; l'idea di unità può essere considerata sia dal punto di vista dell'elemento unitario di un anello di numeri, sia da quello dell'operatore identico di un dominio d'operatori; la lunghezza di un segmento è legata alla grandezza che misura, ma essa non è che un numero annesso convenzionalmente a questa grandezza; infine il valore assoluto dell'algebra classica coinvolge contemporaneamente l'idea di ordinamento e la costruzione della chiusura di un corpo numerico » (*ibid.*, p. 302).

[168] Léon Brunschvicg, *Sur l'implication et la dissociation des notions*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XVI (1908), p. 751.

[169] *Ibid.*, p. 752.

intuitivi ed elementi logici, l'evoluzione del calcolo infinitesimale mostra anch'essa un progressivo affrancamento dai vincoli dell'intuizione: la nozione di continuità, depurata dal supporto intuitivo su cui riposava fino ai lavori di Cauchy ed Abel, una volta ricondotta a « combinazioni di simboli numerici » viene risolta « in senso puramente intellettuale » [170]. A conferma della portata di quest'opera di riorganizzazione, Brunschvicg può riproporre la scoperta di Weierstrass che ' dissocia ', appunto, la nozione di funzione continua da quella di funzione derivabile « a dispetto della connessione secolare che s'era stabilita tra la funzione e la curva » [171].

Se Brunschvicg, senza tener in alcun conto — ci sembra — le differenti età della scienza su cui ha condotto l'argomentazione, perviene alla conclusione metastorica per cui l'intuizione non può assicurare se non il ' presentimento della scoperta ' e va pertanto integrata da un'analisi critica che, « opera dell'intelligenza chiara e riflessa, aprirà il passaggio dallo psicologico all'obiettivo » [172], d'altra parte può constatare — nella storia, questa volta — l'intervento di « rotture definitive, eliminazioni decisive » [173], testimonianze dell'opera di quella dissociazione critica che scandisce le tappe del progresso scientifico subentrando ad epoche di implicazione spontanea in cui le nozioni, destinate ad essere in seguito distinte, « si implicano in una fase unica della vita cosciente », sfatando in tal modo « il doppio pregiudizio dogmatico » [174] secondo cui la conoscenza deve iniziare su termini semplici e la dissociazione non può che far seguito ad un'associazione preliminare.

Non intendiamo seguire Brunschvicg nelle applicazioni religiose e politiche di cui giudica suscettibile questo metodo dissociativo, né Lautman nella chiosa platonizzante che si ritiene autorizzato ad apporvi: ci basta aver accertato, tra le pieghe dell'inchiesta sulla generalizzazione matematica, la presenza — improrogabile, come s'è visto, ad un determinato stadio del discorso — di un elemento per cosí dire disgregante quello stesso impianto, dal momento che ne relega la portata in secondo piano: sulle tracce della dissociazione la pista generalizzatrice si conclude o si perde. Ma se sulla natura composita del precedente stilema

[170] *Ibid.*, p. 753.
[171] *Ibid.*
[172] *Ibid.*, p. 754.
[173] *Ibid.*, p. 757.
[174] *Ibid.*

epistemologico gli esiti controversi che abbiamo incontrato non lasciano dubbi, altrettanto si potrà ripetere a proposito di quest'ultimo: è sufficiente riconsiderare i luoghi ove abbiamo rinvenuto la sua formulazione per ravvisarne, pur nella brevità degli accenni, il gioco su piani distinti, l'opposizione tra intuizione e rigore privilegiata da Brunschvicg rappresentando tutt'altra faccenda dell'enfasi accordata da Lautman alla matematica astratta (significativa al proposito è la differenza di data che separa i due testi).

Certo, rimarrebbe la possibilità di sospettare il fattore dissociativo dell'emergenza di vedute innovatrici (di cui esso costituirebbe il preannuncio o il momento iniziale), arguendo dalla semplice constatazione del suo intervento lo schiudersi di nuovi temi; ma, se è vero che concepire le proprietà agenti sulle strutture classiche indipendentemente dalle entità che le realizzano, o interrogarsi sulla natura generale di un sistema assiomatico non sono argomenti che nascono per capriccio, imputarne l'avvento a quell'esercizio di depurazione concettuale accentuato da Brunschvicg (che lo riferisce, ben inteso, ad altre vicende e ad altri tempi) significherebbe ripercorrere convulsamente una storia che, per altro, è la prima a sancire la non obbligatorietà di questa connessione. Ancora, abbiamo a fare con un'idea che si accompagna a contesti epistemologici differenti, il cui accomodamento in termini di prosecuzione (il primo come fase preparatoria del secondo) appare problematico e di cui la semplice compatibilità non è affatto ovvia. Ma non basta: non si tratta, in effetti, soltanto di differenze nel ' livello di precisione ', come sosteneva Lautman: ad entrare in conto non è soltanto il reperimento di un limite a cui arrestare questa dissezione delle nozioni matematiche, la ricognizione di una zona di assestamento che, mettendo in gioco elementi ' semplici ' e determinando un adeguamento tra senso ed analisi regressiva, contrassegni il livello d'arresto di quest'ultima, bensí anzitutto le ragioni di questo accordo, le motivazioni a cui si attribuisce il complessivo lavoro di riassetto, congiunte a quelle dell'inadeguatezza del materiale originario di cui si intraprende la ricomposizione mediante il discernimento delle sue componenti o la sua trascrizione in un altro linguaggio.

D'altronde, l'assunzione da parte di Brunschvicg di determinati scenari della storia della matematica non sta ad indicare l'avvento di una definitiva età del rigore che ponga fine ad ogni disputa filosofica attorno alla natura di questa scienza: per esempio, per richiamare uno degli avvenimenti testimoni della ' dissociazione ', l'aritmetizzazione dell'analisi costituisce per Brunschvicg un indubitabile progresso tecnico, privo tuttavia di una ricezione epistemologica altrettanto salda. Riducendo i numeri reali e gli immaginari a combinazioni sugli interi si accorda all'analisi lo stesso rigore vigente in campo aritmetico, ma la trasmissione della verità agli stadi superiori resta, a suo parere, insoddisfacente: se il numero intero viene assunto come realtà obiettiva e se ci si risolve a far poggiare l'intero edificio sulla sua intelligibilità intrinseca, le entità ' fittizie ' assicurate dal gioco operatorio non possono che esibire una differenza di natura che le bandisce dal regno dell'obiettività per affidarle ad un piano simbolico non piú in grado di avanzare alcuna pretesa di verità e testimone di una frattura insanabile interna alla scienza. Se questo sembra essere per Brunschvicg l'esito inevitabile di un atteggiamento ' aritmetista ', è concepibile come alternativa (ancor piú deleteria ai suoi occhi) l'elezione del rigore e dell'esattezza conseguiti ai vari livelli della scienza ad unica esigenza alla quale il matematico debba pretendere: l'aritmetica, assorbita dalle forme piú generali e interpretata come loro caso particolare, partecipa della loro natura simbolica venendo cosí privata del privilegio di verità che le veniva precedentemente assegnato. Si compie in questo modo il passaggio al nominalismo: l'intera matematica viene concepita alla stregua di una costruzione convenzionale e l'accesso al suo valore di verità è precluso.

Fin qui Brunschvicg non ha voluto stendere che un resoconto di quelle che sono state, a suo modo di vedere, le ripercussioni epistemologiche di un avvenimento della scienza d'incontestabile importanza e purtuttavia inadeguato, nel semplice atto del suo apparire, a sorreggere il peso della novità che esprime. Infatti, se attraverso l'aritmetizzazione l'analisi conquista una propria autonomia, ciò si compie a detrimento di un tessuto di abitudini mentali e di concezioni filosofiche che facevano dipendere il continuo dall'intuizione geometrica: questo avvenimento, disgregando una configurazione epistemologica, instaura dunque un'instabilità in seno al sapere e denuncia l'urgenza di un lavoro di ricomposizione. Ciò è conforme alla concezione bruschvicghiana della vita scientifica ed al taglio generale che informa il testo di cui stiamo rendendo conto: ci riferiamo a *Les étapes de la philosophie mathématique*[175], in cui Brunschvicg appresta una lettura dell'evoluzione della matematica in termini di quelle che abbiamo chiamato ' idee ', o meglio dei sistemi filosofici in cui esse dimorano. Ma questa storia che s'accompagna

[175] Parigi, Alcan, 1912. Nelle successive citazioni da quest'opera ci riferiremo alla sua terza edizione (ivi, 1929).

a quella delle scoperte ' positive ' non viene assunta alla stregua di un suo epifenomeno, ma come momento necessario dell'attività scientifica: occorre infatti liberare la novità di un nuovo procedimento dalla semplice rispondenza alla soluzione di problemi tecnici, perché esso richiede una presa di consapevolezza che non può essere soltanto metodica, ma deve consistere in una « traduzione in termini intellettuali » che sola può conferire compiutezza ad una nuova dottrina. Alla fase di scoperta ne deve seguire dunque una di riassorbimento e ad ogni progresso scientifico sembra necessitare un decorso di questo tipo prima che l'intelligenza ne possa prendere pieno possesso. A questa regione che contraddistingue « le point d'affleurement dans la conscience » Brunschvicg consacra l'intera indagine [176], e le tappe di cui ripercorre la storia, lungi dal limitarsi a registrare le scosse d'assestamento che fanno seguito a conquiste scientifiche dirompenti quadri di pensiero precedentemente ammessi, scandiscono il ritmo stesso del sapere, per quanto lunghi possano risultare i tempi necessari a ricucire le lacerazioni prodottesi e laboriosa l'opera, dal momento che ad un avvenimento scientifico irriducibile alle concezioni epistemologiche dominanti fa riscontro — come s'è visto — l'assenza di ogni costrizione nell'indirizzo interpretativo che ne deve ricuperare il significato e che, come tale, non può attenersi se non a criteri di convenienza o di verosimiglianza che sono di pertinenza della filosofia, non della scienza.

Del resto, è sulla base di una valutazione strettamente filosofica che Brunschvicg scarta come insoddisfacenti le conseguenze epistemologiche che si sono ricavate dall'aritmetizzazione dell'analisi: esse mancano, come abbiamo constatato, il problema della ' verità ' che si prospetta ai suoi occhi come il problema per eccellenza della filosofia della matematica. La matematica dell'età dei paradossi logici gli si presenta infatti sotto il segno di una di quelle periodiche insolvenze di senso che fanno da contraccolpo a risultati di grande portata: ma si tratta di una crisi apertasi ormai da vecchia data, conseguente agli sviluppi tumultuosi della matematica ottocentesca, troppo clamorosi perché la loro presa in consegna da parte della filosofia potesse compiersi senza difficoltà. Lo stesso orientamento logicista gli appare una risposta (motivata filosoficamente, per quanto la sua attuazione si prolunghi in termini tecnici) a questo stato di disagio: ma essa rimane inadempiente, perché nella versione finale pro-

[176] Cfr. Brunschvicg e altri, *L'idée de la vérité mathématique*, « Bulletin de la Société française de Philosophie », XIII (1913).

posta da Russell i principî logici non costituiscono affatto un corpo omogeneo (a dispetto dell'esigenza di semplicità ed evidenza intuitiva in grado di garantire l'assenza di contraddizioni), ma sono concertati unicamente in vista delle conseguenze matematiche che ne possono derivare. In tal modo la logica si riduce a un sistema ipotetico-deduttivo, condividendo con tutti gli altri le stesse sorti di fallibilità e incertezza: ma questo assetto sancisce l'infondatezza delle sue pretese, perché essa resta debitrice di senso nei confronti della matematica, dal momento che i suoi principî, se avocano a sé la verità di questa, in realtà — come s'è visto — ne dipendono.

Il problema della ricognizione di una ' verità ' immanente alla matematica, in grado di rendere conto della sua evoluzione, si pone cosí in tutta la sua urgenza; ma se alla filosofia spetta il compito di individuarne i modi d'instaurazione, ricuperando il valore di questi progressi, ciò non significa attribuirle l'ultima parola in proposito, ascrivendo ad una qualche sorta di verità metafisica i destini ultimi della scienza. È piuttosto ad un lavoro di esplicitazione che Brunschvicg sta pensando: ad un'ispezione di quei recessi della storia su cui i monumenti del sapere non sono in grado di testimoniare e che nondimeno contrassegnano le fasi d'espansione della scienza, i riconoscimenti di un progresso. È appunto di questi momenti di acquisizione di un ampliamento di sapere e di verità che Brunschvicg tenta di ricostruire una storia altamente idealizzata, che inizia con gli esordi dell'intelligenza matematica per terminare con i suoi prodotti piú astratti. Non ci interessa qui seguire le argomentazioni attraverso cui Brunschvicg ritiene di poter assicurare una ' base ' alle verità matematiche che si trasmetterebbero poi verso l'alto [177]

[177] Cosí Brunschvicg prospetta il problema dei ' fondamenti ', riportandolo a quello della ricostruzione della genesi ' naturale ' del pensiero matematico ai suoi stadi primordiali in cui « si manifesta il contatto originale dell'intelligenza con le cose » (*Les étapes*, p. 462). Nel caso dell'aritmetica, per esempio, è la pratica dello scambio uno contro uno (operazione spontanea comune a tutte le società primitive) che rappresenta la ' radice ' della sua verità, il che non vuole costituire tuttavia una professione d'assenso verso un punto di vista empirista: la matematica nasce come attività pratica, scaturita dalle esigenze della vita, ma dotata di un proprio criterio di controllo; l'idea di corrispondenza, che presiede all'attività di scambio e precede nei fatti ogni tipo di numerazione, fornisce appunto questa regola: la ripetibilità dell'operazione e la sua permanenza al di là degli oggetti concreti su cui s'esercita fanno infatti emergere « qualcosa che non è piú suscettibile di rappresentazione immediata » (*ibid.*, p. 468). L'equivalenza, relazione scientifica elementare, è cosí portatrice di verità in quanto contiene in sé il criterio che la autentica, poiché è suscettibile di verificazione. Brunschvicg non manca di rile-

— indizio, in ogni caso, di un'età in cui si credeva ancora alla parola della filosofia; piuttosto, esaminare questo meccanismo di trasmissione perché sottesa ad esso sta l'individuazione di un'ordine (abbozzo di una teleologia a cui ricondurre l'evolversi delle matematiche) che, ancora, è una figura della generalizzazione: questa chiave di lettura è offerta a soccorso delle difficoltà che s'incontrano nell'accreditare all'algebra una propria dimensione di verità. Se i numeri negativi e quelli immaginari hanno per lungo tempo rappresentato ' scandali ' per l'intelligenza, è perché essi venivano recepiti come semplici artifici di calcolo senza che a questa necessità d'intervento si riuscisse a far corrispondere un adeguato conferimento di realtà. All'imbarazzo causato dalle estensioni dei dominî numerici una concezione puramente formale dell'algebra può ovviare elevan-

vare al proposito il ruolo della matematica moderna nell'apporto di chiarificazione retrospettiva di cui si mostra capace: cosí il procedimento di corrispondenza non costituisce soltanto « la forma piú generale a cui la speculazione perviene raffinando le astrazioni fondamentali della scienza », ma un lavoro di scavo della matematica all'interno dei propri procedimenti che porta ad individuare una funzione che, non nell'ordine della conoscenza (riconoscimento cosciente), ma certo in quella delle cose, « ha presieduto al cammino costitutivo della scienza, assicurandole la verità » (*ibid.*, p. 463).

Piú difficoltoso si presenta il caso della geometria, perché qui, a partire dalla pratica del disegno e dalla possibilità che da essa scaturisce di concepire gli oggetti come contorni e di affrancarsi in tal modo dall'esperienza immediata, occorrerà giustificare l'assetto euclideo come prodotto finale. Lo spazio geometrico oltrepassa i limiti di ogni esperienza possibile, ed è quindi compito della ragione costituirlo, dandosi un mondo ed avanzando un'ipotesi intellettuale sulle cose: le geometrie non euclidee si situano allora nel passaggio al limite che la costituzione dello spazio (esorbitando dalle possibilità di un riscontro empirico) richiede. Brunschvicg non si risolve tuttavia a riconoscere un'ammissibilità di pari diritto a sistemi geometrici differenti, proponendo una soluzione analoga al criterio di convenienza poincareiano, benché dissimulato dall'esigenza di non accettare nessuna forma di convenzionalismo, in un andamento ibrido che dovrebbe coniugare una fenomenologia della conoscenza al prestigio di una tradizione secolare, per cui la sola geometria euclidea « si è dimostrata fin qui capace di sopportare il peso dell'universo » (*ibid.*, p. 520).

Per quanto riguarda la ' radice reale ' dell'infinito matematico, Brunschvicg finisce col legittimare la posizione epistemologica del ' semi-intuizionismo ' francese, ammettendo a titolo di ' idea positiva ' il solo infinito numerabile: cosí, mentre i lavori sulla misura degli insiemi e sull'integrazione condotti da Borel e Lebesgue, facendo uso della teoria degli insiemi, hanno sí mutato profondamente l'aspetto dell'analisi, ma senza rompere « con i procedimenti normali della scienza » (*ibid.*), nel caso della teoria dei transfiniti di Cantor la situazione gli appare sospetta, perché dei termini costituenti la successione degli infiniti è qui richiesta un'intuizione diretta, dal momento che essi « debbono esser dati anteriormente all'ordine che li collega » (*ibid.*, p. 536). Mancando cosí di un contatto stabile con la legge generatrice della successione, alla classe degli infiniti difetta il requisito di ' positività '.

do « le nozioni piú astratte e piú tardivamente acquisite in nozioni *prime* capaci di bastare a se stesse »[178], ma, capovolgendo in questo modo l'ordine naturale della conoscenza, si sarà costretti a consegnare il tutto ad un gioco simbolico sprovvisto di qualsiasi spessore di verità, il che impedisce di far partecipare un nuovo piano operatorio alla verità di quelli conquistati in precedenza. Nella conquista di nuovi territori il sapere deve infatti poggiare su quelli assicurati anteriormente: cosí, nell'ampliamento dei numeri naturali ai relativi, il problema è quello di assicurare il trasporto del complesso operatorio preesistente all'interno del nuovo, senza che ne venga compromessa la verità. Emerge allora l'esigenza di nuove convenzioni che siano in grado di stabilire un collegamento organico tra i due dominî: se non appare alcuna ragione necessitante che imponga un numero positivo come risultato del prodotto di due negativi, ne esiste tuttavia una ' giustificazione razionale ' (di cui Brunschvicg ricostruisce un ideale percorso probatorio [179]), che priva questa stipulazione da ogni sospetto di arbitrarietà. Se essa risponde a una legge di ' convenienza ', non si tratta, come potrebbe sembrare, di considerazioni conformi ad un criterio di permanenza delle forme operatorie del tipo di quello proposto da Hankel: ogni tentativo di riportare le estensioni del sapere sotto l'egida di un principio universale, inclusivo degli sviluppi futuri della scienza, si è sempre rivelato illusorio; inoltre, il senso delle generalizzazioni matematiche procede in una direzione che va dal particolare al generale (conforme al paradigma genetico che abbiamo incontrato piú volte), che rappresenta esattamente l'opposto di quella contemplata da principî *a priori*; siamo invece di fronte ad uno di quei momenti di ' verificazione ' immanenti allo sviluppo della scienza che Brunschvicg ritiene s'incontrino, sotto diverse spoglie, ad ogni apertura di nuovi orizzonti di realtà e che costituiscono il compimento di un progresso.

Nel caso dei numeri immaginari, come in quello precedente, è ancora ad un richiamo all'unità della matematica che spetterà garantire l'ampliamento del sapere, per quanto l'accento volgerà altrove, a testimonianza delle frequenti metamorfosi che nel corso del testo (e della storia) vengono fatte compiere a quest'idea di ' verificazione '. Anche in questo frangente abbiamo a fare con l'introduzione di nuove entità

[178] *Ibid.*, p. 538.
[179] Cfr. pp. 540-541 (*ibid.*).

conseguente ad ostruzioni operatorie, ed anche qui si tratterà di giustificare le leggi di combinazione tra i vecchi e i nuovi elementi, assicurando una connessione di verità che consenta di « far entrare il calcolo degli immaginari nel dominio della matematica positiva » [180]. Non basta tuttavia accertare che « l'equilibrio e l'omogeneità del sistema della scienza » non vengano compromessi da questa estensione numerica, perché all'autenticazione della nozione di immaginario « l'evidenza razionale e quella sensibile fanno ugualmente difetto » [181]. Se ne ricaverà allora il valore obiettivo attraverso un altro ordine di considerazioni: è al successo della nozione che è demandato questo compito ed ' il secolo degli immaginari ' è chiamato ad attestarne l'imprevedibile fecondità, di cui i lavori di Gauss sulla divisibilità degli interi mediante scomposizione in immaginari, che fanno di questa nozione « uno strumento di penetrazione nella struttura intima del numero » [182], costituiscono la dimostrazione esemplare mediante cui alla semplice richiesta di compatibilità di un nuovo dominio numerico con l'edificio preesistente risponde un contraccolpo chiarificatore in grado di apportare nuova luce sulla verità degli stessi piani inferiori. La contaminazione che gli immaginari hanno provocato nel sapere matematico, che soverchia le esigenze che avevano presieduto al momento della loro introduzione, fornisce il riscontro definitivo della loro ' obiettività ', nel vero senso della parola, giacché il loro intervento nelle differenti branche della scienza, presentandosi come un fenomeno inaspettato, richiama « l'idea di un fatto di natura, legato ad una forma specifica di esperienza » [183].

È dunque dall'escussione della storia che si ricaverà quell'unità della matematica funzionante da criterio finale nel conferimento di verità ad una nozione, la quale viene cosí consegnata alle rivelazioni di un futuro indeterminato e tuttavia necessario, dal momento che è ad esso che compete, per lo meno a questo stadio della ' generalizzazione ', legittimare l'incremento del sapere. D'altra parte questo, al pari degli altri precedentemente incontrati, a proposito dei quali era stata avanzata l'esigenza di ' verificazione ' sotto forma di trasmissione di verità anteriori, poteva corrispondere ai termini della richiesta in quanto dispiegantesi lungo stratificazioni successive, in quanto ricondotto ad uno schema che

180 *Ibid.*, p. 543.
181 *Ibid.*
182 *Ibid.*, p. 545.
183 *Ibid.*, p. 546.

la stessa posizione del problema esige: l'estensione progressiva delle operazioni matematiche.

Sennonché, senza dissonanza apparente rispetto a questa ' finalità ' che la filosofia (ovvero Brunschvicg) ritiene di poter assegnare tanto « allo sforzo dell'inventore [quanto] al lavoro del logico » [184], appare come ultimo termine di confronto la nozione di gruppo: è giunto cosí il tempo di riesaminare quell'esperienza privilegiata di cui parlava Dufumier e di spiare la filosofia specchiarsi alla sua luce.

2. - Epifanìe gruppali: due o tre cose che i filosofi scrissero in proposito.

La verità manifestantesi nella rete di connessioni che un'innovazione teorica è in grado di svelare nell'edificio delle matematiche sembra dunque costituire il responso capace di assicurare un'unità alla scienza che, in quanto scaturita da « un gioco di relazioni effettive che fa di una serie di discipline distinte un tutto organico » [185], appare conforme ad un disegno ' naturale ', ovvero obiettivo, proprio perché imperscrutabile e non prescritto da una pianificazione artificiale sottomessa ad un principio generale o consona ad un concetto preesistente, ma scandito da quei « momenti solenni (...) in cui due dominî fino ad allora coltivati per se stessi ed in apparenza votati ad una delimitazione definitiva entrano improvvisamente in contatto e si prestano un soccorso inatteso » [186].

Esemplare, nella rispondenza a questa richiesta di autenticità d'origine, è allora la nozione di gruppo: formulata nel vivo di un'indagine che teneva banco da secoli, muta i termini stessi del problema, opponendo la semplicità della teoria alle difficoltà che s'incontravano nella pratica e propagando presto la medesima chiarezza sui territori piú disparati della ricerca. Ma come ridurla allo schema delle estensioni operatorie [187], come farne un episodio di quell'ascesa verso una generalità crescente senza mutare la concezione di quest'ultima?

184 *Ibid.*, p. 561.

185 *Ibid.*, p. 550.

186 *Ibid.*, p. 446.

187 Si potrebbe interpretare in tal senso la teoria di Galois, benché le ' aggiunzioni ' di entità concernano un *corpo* piuttosto che un gruppo. Inoltre, quand'anche riferita (impropriamente) a tale circostanza, la nozione di gruppo risulterebbe vincolata al momento della sua formulazione originaria, contraddicendo in tal modo

Si potrebbe lasciar cadere la costrizione di quello schema, imputandola ad una formulazione poco felice, ed attenersi al criterio di fecondità senza che questo s'accompagni necessariamente ad un insediamento contiguo di entità accanto ad altre entità: in effetti la nozione di gruppo non ha, come quella di numero negativo o immaginario, « l'apparenza esteriore di un concetto a cui corrisponderebbe un oggetto » [188]; anzi non s'incontra al suo proposito nessuno di quegli intralci d'intelligibilità che la nozione d'immaginario, per esempio, sembrava comportare in quanto « segno di un'operazione impossibile ad effettuarsi » [189], perché nulla è piú trasparente di « una teoria dei gruppi, in cui le sole leggi di composizione dei simboli costituenti il gruppo sono messe in evidenza » [190], la natura di questi simboli non venendo invece presa in considerazione. Attraverso questa consegna all'astratto la nozione di gruppo non sembra richiedere giustificazioni d'intelligibilità; serve anzi « a definire l'intelligenza facendo emergere i caratteri piú profondi che attengono all'idea di *operazione* » [191]: pertanto alla legittimazione della teoria non necessita (se non altro nella stessa misura dei casi precedenti) la stima della sua estensione e fecondità. Ma il richiamo ad un simile criterio di semplicità (lungo cui sembra attuarsi questa verificazione ' diretta ', basata sull'intelligibilità intrinseca della nozione in esame) è in realtà soltanto apparente e maschera un'ineliminabile dipendenza dal retroscena storico in cui essa è maturata che, solo, può conferire alla struttura di gruppo una posizione di preminenza rispetto alle innumerevoli altre concepibili ed in grado di vantare una semplicità formale ancora maggiore. Cosí per Brunschvicg si può certamente accarezzare il progetto di una teoria generale delle relazioni come ultimo passo in questa direzione a cui l'astrazione conduce, ma se il suo argomento si limitasse a contemplarne la forma vuota o a misurarsi con i caratteri piú estrinseci che esse possono presentare (come la simmetria o la transitività), questa teoria non potrebbe fornire a suo parere tematiche degne d'interesse per il matematico. D'altra parte quali sono i caratteri ' intrinseci ' che

la linea interpretativa di Brunschvicg che dovrebbe contemplare il successo della nozione nella molteplicità dei territori in cui viene impiegata.

188 Brunschvicg, *op. cit.*, p. 550.

189 *Ibid.*, p. 556.

190 *Ibid.* (Brunschvicg sta citando la *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, 1909).

191 *Ibid.*, p. 557.

le si potrebbero opporre se non quelli che la storia ha riconosciuto come tali? Sicché una teoria di questo tipo dovrà ricercare il proprio valore nella rispondenza a contenuti storicamente elaborati sotto l'urgenza di difficoltà incontrate ' sul campo ', come è appunto il caso della nozione di gruppo. Il compito positivo che le si può assegnare consisterà allora nel confrontarsi con quelle « operazioni effettive » che ci vengono esibite dallo sviluppo della conoscenza scientifica, accondiscendendo al « movimento intellettuale che ha progressivamente avvicinato le une alle altre queste diverse operazioni, scoprendone l'unità sistematica » [192]. Ma una volta giunti in possesso di queste « analogie di struttura » [193], che cosa farne? Se ci si attiene all'affermazione brunschvicghiana secondo cui « separando brutalmente [una nozione] dalle radici che la immergono nella realtà del pensiero matematico si rischiava di toglierle nel contempo il suo valore scientifico » [194], solo attraverso un ricorso alla storia si potrà restaurare un collegamento tra una novità teorica ed il sapere preesistente (il che riassume quella che era l'esigenza di verità avanzata da Brunschvicg), assicurando la loro contiguità non piú in termini di un ampliamento numerico o di un'estensione operazionale, ma attraverso l'insediamento della nuova nozione in una zona problematica aperta che garantisca non soltanto il suo successo ma anche l'autenticità del suo intervento. Ma in questo modo l'opportunità di allestire teorie generali resta in sospeso e con essa anche la possibile legittimazione epistemologica della nascente algebra astratta, perché la necessità di preservare gli addentellati ' genealogici ' di una nozione non si traduce in una precisa istanza metodologica e nondimeno può portare alla disistima di una trattazione ' in astratto ' di quelle forme desunte dal concreto di un'inda-

[192] *Ibid.*, p. 559.

[193] *Ibid.* Brunschvicg adotta quest'espressione ascrivendola a merito della trascrizione in forma simbolica delle operazioni logiche o matematiche (grazie a cui, per esempio, si evidenzia come il calcolo logico ricalchi quello delle classi o la legge di dualità della geometria proiettiva permetta di reinterpretare i teoremi sostituendo p u n t o a r e t t a e viceversa) « conformemente all'idea maestra di Boole e Grassman, alla quale i logici della scuola italiana hanno avuto il merito di rimanere fedeli » (*ibid.*), in contrapposizione al ' realismo ' della logistica e della teoria degli insiemi. Alla pagina successiva sembra poi attribuirle una funzione euristica: « la difficoltà dell'invenzione consiste nel rigetto delle analogie esteriori e superficiali, per scoprire tra operazioni dall'apparenza del tutto differente (...) delle ' analogie di struttura ', che forniscono il metodo di chiarire il corso della scoperta da fare attraverso quello della scoperta già fatta ».

[194] *Ibid.*, p. 559.

gine. Pertanto la posizione epistemologica della teoria dei gruppi è resa precaria, mancandole una condizione d'autonomia per cui le sue sole risorse bastino a sostenerla, dal momento che « la messa in forma logica è indifferente alla materia di verità » [195]: non si può, di conseguenza, accordarle l'azione di prendere in consegna delle ' nature semplici ', perché ciò significherebbe fare di un universale un nuovo ' concreto ', cosa che Brunschvicg non potrebbe ammettere se non infrangendo quell'apparecchiatura di verificazioni che è venuto pazientemente montando in un complicato lavoro d'incastro. Ma l'inibizione ad un riconoscimento di questo tipo ha una provenienza meno occasionale: su di essa grava una serie di p r e g i u d i z i (nel senso di concezioni maturate in altra sede teorica), che Brunschvicg non può sacrificare, in quanto rappresentano l'equipaggiamento filosofico che ha predisposto in vista dell'indagine, i preliminari gnoseologici che ne stabiliscono la prospettiva generale [196] e motivano la stessa esigenza di ' verità ' nella forma in cui l'abbiamo conosciuta, alla quale contravverrebbe, evidentemente, fare dell'ultimo venuto nell'ordine della conoscenza « un principio di deduzione progressiva a cui chiedere di spiegare questa o quella particolare determinazione ». È pertanto vano attendersene una deliberata trasgressione e, in ottemperanza a questa coscienza (o deformazione) professionale, il filosofo Brunschvicg si mostra reticente di fronte alle novità epistemologiche che la nozione di gruppo sembra esprimere precipuamente riguardo al suo ' essere generale ', mentre, in conseguenza della difficoltà di riferirla ad una collocazione teorica ben determinata, la sua natura resta enigmatica.

A questo silenzio tematico fa da contrappunto il solo criterio di refutazione (di cui possiamo ormai riconoscere i presupposti) nei confronti della linea interpretativa che fa dei gruppi « una forma innata dello spirito, sorta di giudizio sintetico *a priori* » [197]: con ciò Brunschvicg prende le distanze dalle vedute di Poincaré, rimproverandogli la disin-

[195] *Ibid.*, p. 560.

[196] È in base a considerazioni di questo tipo che Brunschvicg si oppone, per esempio, alla teoria degli insiemi (per altro frettolosamente apparentata all'indirizzo logicista): se in questa presa di posizione entrano senza dubbio in conto le riserve formulate in proposito dalla comunità matematica francese (cfr. nota 177), è l'assimilazione tra il generale e l'essenziale attuata dal ' realismo delle classi ' che, « invertendo il lavoro dello spirito », gli riesce particolarmente indigesta.

[197] *Ibid.*, p. 557.

voltura con cui fa intervenire considerazioni matematiche nell'argomentazione filosofica.

Non entreremo nel merito di questa censura, perché, del resto, è tutta l'argomentazione poincareiana ad essere improntata a questo tono [198]: le teorie matematiche (o meglio geometriche) rievocano per lui una trama di esperienze primordiali, rintracciabili in un'immaginaria condizione d'innocenza del sapere, il primo darsi di materiali empirici che s'organizzano attorno ad una forma ancora grezza che verrà successivamente depurata dall'intelligenza e riadattata alle sue esigenze. Le costruzioni teoriche sembrano cosí necessitare di un antefatto naturalistico, perché una ricostruzione di questo tipo appare coinvolta nella loro legittimazione [199]; d'altra parte, se dei dati ricavati dall'esperienza si danno una forma e se l'intelligenza avanza in proposito pretese proprie, è perché i primi funzionano da suggerimento (o presagio) teorico, mentre la seconda porta a compimento ciò che non potremmo indi-

[198] Andrebbe in effetti riesaminata *de iure* l'impostazione epistemologica di Poincaré (ed anche in questo frangente Brunschvicg avrebbe rimostranze da fare); nel caso specifico, tuttavia, il passo a cui Brunschvicg si riferisce (Poincaré, *L'espace et la géométrie*, « Revue de Métaphysique et de Morale », 1895, p. 641) è altamente enigmatico e costituisce l'abbozzo di quanto verrà riesaminato solo successivamente in modo dettagliato (nello scritto *On the Foundations of Geometry*, 1898).

Va notato che l'articolo della « Revue de Métaphysique » che abbiamo appena menzionato verrà riproposto in *La Science et l'Hypothèse* (1902) con l'omissione del passo in questione. Questo concerne l'origine delle tre dimensioni dello spazio, un problema su cui Poincaré tornerà a piú riprese mutando di continuo la strategia esplicativa ed appoggiandosi, nel far questo, a diverse regioni teoretiche: al ruolo assolto in tal senso dai gruppi di Lie in *On the Foundations of Geometry* e *La Science et l'Hypothèse* (che per altro risolvono il problema in modo differente) subentrerà la topologia nelle pagine di *La Valeur de la Science* (1905) e *Dernières Pensées* (1913). *On the Foundations of Geometry* comparve in lingua inglese sulla rivista americana « The Monist » (IX, 1898-1899); l'originale francese andò perduto. Per parte nostra non siamo riusciti a reperire neppure la versione inglese e ci riferiamo pertanto alla traduzione di L. Rougier (*Des fondements de la géométrie*, Parigi, Chiron, Bibliothèque de synthèse scientifique, 1921) nelle citazioni che seguiranno.

[199] Per esempio, a proposito della geometria descrittiva Poincaré scrive: « Giungere alla nozione di lunghezza considerandola semplicemente un caso particolare di rapporto anarmonico costituisce un percorso artificiale che ripugna. Non è certamente in tal modo che si sono formate le nostre nozioni geometriche » (*On the Foundations of Geometry*, trad. franc., p. 53): tutto ciò rappresenta « il punto debole » della teoria. È per questo che Poincaré si premura di assicurarle una base naturalistica, rintracciando le esperienze che avrebbero potuto suggerirne gli assiomi.

care se non come esercizio di reminiscenza, dal momento che alle forme mostratesi in questo frangente si attribuisce una 'preesistenza' nei confronti del contesto empirico che le ha attivate o, appunto, risuscitate.

Sul commercio tra empirico e teorico riposano il convenzionalismo di Poincaré [200] e, accanto ad esso e non senza un certo sconcerto all'interno dell'impianto epistemologico chiamato a riceverla, la questione gruppale, di cui ci apprestiamo a rintracciare l'emergenza tra le necessità del discorso poincareiano, perché una volta che si sia dato assenso alla sua prospettiva d'indagine attorno all'origine delle nozioni geometriche, i gruppi sembrano sopraggiungere come un'evenienza ineluttabile.

A che momento datarne allora la comparsa? Il testo in cui Poincaré tratta piú estesamente della questione è *On the Foundations of Geometry* (1898); successivamente si manterrà per lo piú fedele a quest'impostazione, per quanto ne attenuerà molto la portata esplicativa, limitandone il ricorso ad una forma allusiva su cui grava un nugolo di sottintesi irrisolti. Nell'articolo citato, viceversa, l'intervento gruppale viene esaminato nei dettagli: esso va imputato all'individuazione degli spostamenti nell'ambito delle nostre sensazioni. Di per se stesse, queste non sono in grado di esibire nessun'organizzazione nel loro mero succedersi: soltanto grazie ad una serie di operazioni dell'intelletto è possibile discernervi certe regolarità e raggrupparle di conseguenza entro categorie rispetto alle quali lo spazio geometrico tridimensionale non rappresenta che il prodotto finale, di cui Poincaré non si stanca di sottolineare l'irreperibilità nella percezione immediata: è al termine di un complicato percorso (quello, appunto, di cui sta tentando la ricostruzione e che viene scandito da una sequela di stipulazioni con cui l'intelligenza mette ordine in ciò che inizialmente non è che un ammasso caotico), che s'inizierà a intravedere qualcosa d'analogo allo spazio della geometria, per quanto quest'ultimo rimanga una pura idealità a cui è possibile rapportare il mondo fenomenico unicamente mediante un artificio convenzionale. L'accoglienza del fattuale nel teorico può infatti avvenire soltanto a questa condizione: cosí, per esempio, non esistono in natura i solidi perfetti della geometria e la realtà lascia sempre sussistere un certo gioco di approssimazione. La

[200] Per lo meno nelle pagine di *On the Foundations of Geometry*.

collimazione con le leggi che gli assiomi geometrici esprimono non può essere rigorosamente rispettata e nondimeno noi ragioniamo come se ciò avvenisse, addebitando la circostanza contraria alla concomitanza di componenti perturbatrici e comunque trascurabili (perché se cosí non fosse il quadro che imponiamo alla realtà non risulterebbe sufficientemente comodo ed occorrerebbe approntarne un altro). La convenzione geometrica si avvicina in questo senso a quella fisica, discostandosene per il fatto di non essere sottomessa al verdetto dell'esperienza (in questa indipendenza sembra consistere, in questo testo per lo meno, il significato delle convenzioni matematiche).

Vediamo dunque come si perviene alla determinazione degli spostamenti all'interno del viluppo dei dati sensibili: tra le affezioni dei nostri sensi siamo portati a distinguere i mutamenti esterni, involontari e non accompagnati da sensazioni muscolari, da quelli interni, per i quali accade il contrario; tra quelli esterni gli ' spostamenti ' saranno quei mutamenti che, almeno potenzialmente, possono essere corretti da un mutamento interno in grado di ristabilire l'impressione primitiva, mentre i ' mutamenti di stato ' saranno quelli per cui tutto ciò risulta impossibile. Infine, due mutamenti esterni che apparentemente possono non avere nulla in comune, verranno identificati in un solo spostamento se suscettibili di essere corretti da uno stesso mutamento interno (che si tratti dello stesso mutamento lo rivela il fatto che si è ripetuta la medesima serie di sensazioni muscolari, riconoscibile per parte sua grazie alla nostra facoltà di distinguere ed identificare le nostre azioni, ammessa in precedenza ed alla quale, pertanto, ci si arresta).

Una volta c o n v e n u t o[201] tutto ciò, l'insieme degli spostamenti risulta formare un gruppo: e tuttavia, si chiede Poincaré, come veniamo a saperlo? Né un ragionamento *a priori* né l'esperienza sono in grado di assicurarlo: i dati in nostro possesso non garantiscono, infatti, che due spostamenti che si succedono vengano compensati dalla successione dei due mutamenti interni corrispondenti, mentre l'esperienza può mostrarci soltanto che tutto ciò accade approssimativamente. È pertanto tramite una convenzione che possiamo imporre alla realtà que-

[201] Si tratta infatti di una convenzione, dal momento che i risultati dell'esperienza vengono sottomessi ad un raggruppamento intellettuale e non empirico (le compensazioni tra i due mutamenti — uno esterno ed uno interno — non essendo mai realizzata esattamente).

sto schema, per quanto ciò sia lecito a patto che essa non offra troppa resistenza: il gruppo in questione rappresenta quindi un costrutto convenzionale, eletto tra gli infiniti altri immaginabili in base ad una considerazione di comodità.

Secondo un'analoga procedura, ulteriori rubricazioni di dati sensibili, radunantisi anch'esse in forma gruppale, sono chiamate a concorrere all'edificazione dello spazio: cosí i sottogruppi rotativi sono riconoscibili ' in natura ' per il fatto che determinati spostamenti lasciano inalterate certe sensazioni (che permangono costanti anche nel corso del mutamento interno corrispondente) e che questa proprietà non dipende dalla natura qualitativa delle sensazioni in questione. L'insieme degli spostamenti che conservano un dato sistema di sensazioni risulta allora formare un sottogruppo del gruppo totale degli spostamenti; che press'a poco le cose stiano in questi termini ci è rivelato ancora una volta dalla lezione approssimativa dell'esperienza: nella teoria tutto ciò si tradurrà in un'istanza per cui l'adozione di un gruppo a cui riferire la struttura delle nostre sensazioni dovrà contemplare l'esistenza di un tale sottogruppo [202]. I sottogruppi rotativi svolgono inoltre un altro ruolo importante, perché è ad essi che Poincaré fa risalire l'origine della nozione di punto e della tridimensionalità dello spazio. In effetti tramite essi si giunge a conoscere l'ordine del gruppo, per quanto Poincaré tenti qui di destreggiarsi in una difficile opera d'alchimia tra le conseguenze formali dell'esistenza del gruppo [203] (che in quanto

[202] Fin qui restano aperte diverse possibilità di costruzioni teoriche: alla geometria euclidea si perverrà introducendo un sottogruppo invariante (costituito dalle traslazioni). Anche in questo caso è l'esperienza che deve esprimere il suo suggerimento in proposito.

[203] In verità Poincaré avanza nel corso dello stesso testo un'ipotesi alternativa sulla provenienza della nozione, connessa al significato intuitivo dell'idea di posto. Quando si afferma che un oggetto occupa il posto dove precedentemente si trovava un altro oggetto si tiene conto di dati visivi e tattili (che determinano direzione e distanza) ed in prima linea d'approssimazione si potrà dire che due attitudini del corpo rivelate da due serie di sensazioni muscolari indiscernibili individuano uno stesso punto, mentre due posti saranno ritenuti distinti se corrispondono a due posizioni e attitudini distinte del corpo. Ma una convenzione s'impone: l'esperienza ci insegna infatti che la posizione relativa delle differenti parti del corpo può cambiare mentre, per esempio, la sensazione tattile di contatto con l'oggetto resta costante. Entreranno in tal modo a far parte di una stessa classe d'equivalenza (a cui corrisponderà un solo punto) una serie di attitudini distinte, e la circostanza che i movimenti che ci fanno passare dall'una all'altra formino un gruppo si presenta come condizione di legittimità di tale convenzione. Ogni punto è in tal modo

tali non possono venire invocate in una ricostruzione della genesi ' naturale ' dello spazio) ed il loro corrispettivo empirico (l'insegnamento grossolano delle osservazioni); se si poteva concedergli la provenienza intuitiva dei sottogruppi rotativi, è piú arduo seguirlo quando, senza il conforto di esperimenti mentali attraverso cui aveva fino a questo momento reso plausibile la sua argomentazione, individua l'ordine del gruppo nel numero di sei (ogni trasformazione infinitesimale potendo essere espressa linearmente da sei trasformazioni infinitesimali indipendenti), benché tutto ciò vada ascritto « alle medesime osservazioni grossolane »[204].

Con l'ammissione di un ordine non è tuttavia stabilito quale sia il grado del gruppo, ovvero il numero delle sue dimensioni: in effetti le variabili indipendenti fin qui chiamate in causa sono tante quante le nostre fibre nervose. Come si perviene allora ad assicurare tre dimensioni allo spazio? Sostituendo la ' materia ', cioè le coordinate del gruppo in questione, e conservandone ' la forma ' (cioè la struttura): in altre parole sostituendolo con un gruppo isomorfo piú maneggevole. Ora questa convenzione, al pari di quelle che l'hanno preceduta, non può consistere in un decreto arbitrario, in un mero artificio: le ragioni del testo (se non altro) impongono che sia la realtà a fornire una guida di scorrimento per il suo innesco e questa possibilità si trova, appunto, nei gruppi rotativi. Ad ognuno di essi (ossia a quanto viene conservato dai suoi spostamenti) conveniamo di far corrispondere un unico elemento dal valore puramente schematico, il punto: se si considerano allora i differenti trasformati TRT^{-1} di un dato gruppo rotativo R (dove T varia nel gruppo totale degli spostamenti), questi risulteranno costituire un'infinità tripla continua.

In questa constatazione consisterebbe dunque il numero delle dimensioni spaziali: non si tratta tuttavia di un passo obbligato, perché

associato a un certo gruppo (sottogruppo del gruppo dei movimenti che forniscono al corpo tutte le posizioni e attitudini possibili).

Tornando alla precedente spiegazione dell'origine dei punti, ognuno di questi corrispondeva ad un sottogruppo del gruppo degli spostamenti del corpo considerato come solido invariabile. Ovvi rapporti d'inclusione si stabiliscono pertanto tra i gruppi e sottogruppi contemplati dalle due ipotesi: Poincaré si limita a confrontarle, propendendo per la semplicità e la naturalezza di quella che adotta gli spostamenti come base di riferimento, e conclude che « in ogni caso l'introduzione di un gruppo piú o meno complicato sembra assolutamente necessaria » (*op. cit.*, p. 49).

[204] *Ibid.*, p. 33.

altri raggruppamenti dei dati sensibili avrebbero potuto venire eletti quali ' punti ' dello spazio (ed in questa possibilità di scelta che consente differenti soluzioni teoriche, per altro vincolate in questo caso da un isomorfismo gruppale, si trova un'altra caratteristica del concetto di convenzione, che Poincaré privilegerà nei suoi scritti successivi). Cosí anche i sottogruppi elicoidali (formati dalle rotazioni attorno a un asse combinate con le traslazioni parallele ad esso) sono in grado di vantare una provenienza ' naturale ', ovvero posseggono un referente empirico in situazioni rintracciabili intuitivamente (stando a Poincaré, per lo meno): dal momento che i differenti trasformati di un sottogruppo elicoidale costituiscono un'infinità quadrupla, assumendoli in qualità di elementi otterremo uno spazio a quattro dimensioni in cui le linee rette prendono il posto dei punti. Perché allora è stata adottata la prima soluzione? Poincaré avanza ancora un criterio di semplicità in proposito, aggiungendovi tuttavia una considerazione di priorità nell'ordine della conoscenza: l'apprendimento dei sottogruppi elicoidali gli appare infatti piú recente e meno diretto rispetto all'acquisizione di quelli rotativi.

Avremo modo di ritornare sull'importanza che Poincaré accorda a queste differenze di data gnoseologica; in precedenza è tuttavia opportuno riesaminare i modi d'instaurazione di quegli ' interventi della ragione ' che, sovrapponendosi architettonicamente, assumono una disposizione teorica che finisce col coincidere, come s'è visto, con la geometria euclidea, rappresentandone la genesi naturale. In ciascuno di essi prendono parte, combinandosi tra loro, due operazioni, astrazione (nella sua accezione piú classica) e convenzione (in quanto misura dello scarto che separa il ' fatto bruto ' dalla sua registrazione teorica): in altre parole si raggruppano dati empirici che presentano una qualche differenza comune, e ciò benché «non la posseggano perfettamente».

Questa precisazione racchiude in sé il problema ontologico delle entità matematiche; a sollevarlo è il quesito che si pone a proposito dell'origine dell'operazione che le corrisponde: perché mai siamo portati a sottoporre a procedure di raffinamento quanto ci viene rivelato dai sensi? Come prima risposta si potrebbe addurre l'inevitabile semplificazione che sembra connessa all'approntamento di un linguaggio affinché questo possa far presa sui ' fatti ' che è chiamato a esprimere. Sennonché l'invocazione di un generico criterio di comodità non sembra in questo caso soddisfacente: in effetti, qui non si tratta soltanto di depurare artificialmente lo scenario sensibile da elementi di disturbo o di complicazione, ma d'inserirvi motivi che inizialmente non vi comparivano e che non hanno pertanto origine empirica. Talvolta ciò avviene smentendo i dati dell'osservazione: cosí il continuo 'fisico' (quello, cioè, che i sensi ci consegnano) appare contraddittorio, perché due sensazioni possono risultare indistinguibili da una terza e tuttavia distinguibili tra loro; ma tutto ciò « ripugna alla ragione »[205] e in ottemperanza alle esigenze di quest'ultima sostituiamo un altro continuo a quello 'concreto'.

La costruzione teorica è dunque ben lontana dal rappresentare una semplice mimesi di circostanze constatabili empiricamente e alla domanda sul perché si debbano smussare le 'irregolarità' di queste ultime Poincaré risponde che ciò avviene perché siamo in possesso di una 'regola' a cui riferirle (ammesso che suppergiù vi si attaglino), la quale consiste nel caso appena esaminato nella rispondenza a certe esigenze immanenti, cosí sembra, al raziocinio; resta tuttavia da precisarne la modalità del possesso.

Questa può venir chiarita tornando ad una 'categoria' già presupposta al momento della sostituzione del continuo fisico con un costrutto teorico: si tratta del primo intervento richiesto all'intelligenza affinché questa possa riordinare il groviglio dei dati sensibili, ossia la facoltà di riconoscere o distinguere delle sensazioni e di disporle in una scala d'intensità. Questo potere, che sembra necessario dover attribuire allo 'spirito' ed in cui è implicato il riferimento a una struttura d'ordine, non rappresenta tuttavia un 'trascendentale', nel senso di una 'forma della sensibilità' senza la quale non potrebbero darsi le nostre sensazioni, ma tutt'al piú una 'forma dell'intelletto' che ci consente di ragionare su di esse e che funziona da modello per le successive chiamate in causa di schemi intellettuali a cui rapportare i dati empirici: come quella deve in qualche modo precederli (dal momento che da loro non si può ricavare), cosí pure a questi verrà attribuita un'analoga anteriorità.

Si precisa con ciò il significato delle 'convenzioni matematiche': esse consistono nell'istituzione di un collegamento tra contenuti empirici e contenuti ideali, ossia nel decreto (artificiale, perché la loro collimazione resta sempre approssimativa) che assicura questa corrispon-

[205] *Ibid.*, p. 25.

denza, mentre la circostanza che essa rappresenti un'opzione tra complessi teorici differenti rimane in questo testo sullo sfondo.

Quanto ai ' contenuti ideali ', se è individuato (benché in modo affatto generico) il loro luogo d'appartenenza, nulla ci è detto a proposito della loro scaturigine: in mancanza di soluzioni migliori se ne suppone semplicemente la detenzione virtuale da parte dello ' spirito '. Ad un suo successivo intervento spetterà poi di attivarli: « lo scopo di quest'intervento è di riferire le nostre sensazioni a una sorta di rubrica o categoria che » — appunto in quanto non può avere provenienza empirica — « preesiste in noi » [206].

Dobbiamo allora interrogarci su questa preesistenza: fin qui essa non appar che come una semplice presupposizione indiziaria, il ricorso a frammenti logici che, perché non desumibili dall'esperienza ed apparentemente coinvolti di necessità nell'esercizio del pensiero, possono dirsi in qualche modo ' innati '; la faccenda si fa però gravosa quando il tutto assume piú decisamente dei contorni matematici: anche ai gruppi viene infatti attribuito il medesimo carattere aprioristico.

Cosí la nozione del gruppo continuo degli spostamenti euclidei è detta esistere « nel nostro spirito anteriormente ad ogni esperienza » [207] e d'altra parte ciò può venir ripetuto — precisa Poincaré — anche a proposito di altri gruppi continui [208]. La lezione dell'esperienza si limita dunque a segnalarci quale di questi gruppi si attagli meglio alla corrispondente situazione concreta: « abbiamo in noi, in potenza, un certo numero di modelli di gruppi e l'esperienza ci aiuta soltanto a scoprire quale si discosta meno dalla realtà » [209]. Ma cosa significa questa loro presenza subliminale? Sembra che dalla loro indipendenza nei confronti dell'esperienza e dal ' dato di fatto ' del loro intervento nella costruzione dello spazio, Poincaré passi a dedurne il possesso congenito (se riferiamo i dati sensibili a una ' forma ', in effetti questa deve esserci in qualche

[206] *Ibid.*, p. 7.

[207] *Ibid.*, p. 63.

[208] Attenendosi allo stesso metro di giudizio, ciò dovrebbe continuare a valere a proposito di ogni altra nozione matematica.

[209] *Ibid.*, p. 23. ' Modello ' sembra voler qui indicare ' struttura astratta ' (classe d'equivalenza di gruppi isomorfi). L'adozione del termine evidenzia il ruolo svolto da un costrutto ideale nei confronti di attuazioni reali, che ad esso vengono rapportate come ad un ' campione ' o, appunto, un ' modello ' ideale. Si noti che per i ' modelli ' intesi nel loro significato attuale, Poincaré — al pari della letteratura del suo tempo — fa uso del termine ' esempio '.

modo disponibile in via preliminare), dispensandosi cosí dall'avanzare ogni ipotesi sulla loro acquisizione o provenienza. Saremmo dunque i detentori inconsapevoli di un arsenale di idealità chiamate al risveglio da sollecitazioni empiriche. Finché vivono nel regno delle pure forme, esse non paiono (per il momento) sollevare problemi di ' verità ': esistendo a titolo di ' possibili ', a tutte andrà attribuita, in linea di diritto, pari legittimità; inoltre, in quanto contenuti innati, non potranno venir considerate ' artificiali ', il momento della convenzione consistendo, come rilevato in precedenza, nella loro adozione ' reale '. « L'esperienza — conclude Poincaré — non è che un'occasione per riflettere sulle idee geometriche che portiamo in noi » [210] e funziona pertanto da maieutica.

Ma ad esperienze diverse potrebbero corrispondere differenti risposte teoriche, come testimonia l'esplorazione di ' mondi possibili ' che, sull'esempio di un genere letterario già coltivato da Helmoltz, Poincaré effettuerà con dovizia di particolari nelle pagine di *La Science et l'Hypothèse*: qui la plausibilità delle geometrie non euclidee (relegate di fatto a costruzioni fantasiose) è assicurata da descrizioni di regioni fittizie, governate da immaginarie leggi naturali e popolate da animali favolosi [211]. A che cosa è volta la citazione di simili esperimenti mentali? A legittimare la ' ragionevolezza ' di certe convenzioni, invocando la concepibilità di un ambiente che le suggerirebbe: che non si tratti di assurdità è mostrato appunto dalla possibilità di escogitare finzioni di questo tipo. L'adozione di un criterio psicologico di non contraddizione non rappresenta per altro un mero artificio letterario: esso rappresenta piuttosto l'analogo di ciò che in matematica è la ricerca di un modello, sennonché i ' modelli ' da addurre in questo caso sono situazioni ' concrete ' di un mondo possibile e come tali vanno riferite a un ipotetico soggetto senziente che, attraverso una stipulazione ' naturale ', sceglierà a quale geometria riferirle, ammesso che detenga lo stesso arsenale di forme che è in nostro possesso: se si tiene presente che Poincaré sta argomentando in sede gnoseologica, il suo ricorso a questa sorta di zoologia fantastica non appare dunque tanto stravagante. Dalla optabilità (in qualche mondo) per le geometrie non euclidee, Poincaré esclude allora che si possa attribuire agli assiomi geometrici la qualifica di ' giudizi sintetici a priori ' (« altrimenti

[210] *Ibid.*, p. 62.

[211] Nel cui vasto repertorio si annoverano esseri infinitamente piatti, sferici, fluidi, deformabili in ragione della temperatura ed anche dei folli che dedicano la loro esistenza al tentativo di rappresentarsi una quarta dimensione.

— scrive — essi ci si imporrebbero con una forza tale che non potremmo concepire la proposizione contraria né costruire su di essa un edificio teorico » [212]): non essendo d'altro canto verità sperimentali, essi andranno considerati alla stregua di convenzioni.

Eccoci dunque di fronte ad una nuova accezione di questo termine: viene conservata la distanza tra ideale e empirico, ma accanto a questa compare la scelta tra alternative teoriche in concorrenza. Poiché stiamo indagando sullo statuto epistemologico accordato ai gruppi, dobbiamo chiederci che ne è stato del carattere aprioristico che era loro riservato nel testo precedente. Il fatto è che Poincaré distingueva tra assiomi geometrici [213] e gruppo soggiacente: nella teoria di Euclide, per esempio, non si fa ricorso unicamente agli assiomi enunciati in forma esplicita, ma a molti altri in cui è presupposta la nozione di gruppo, la quale costituisce « il principale fondamento delle dimostrazioni euclidee » e « domina ogni ragionamento » [214]. Da questa precedenza logica Poincaré desume un'anteriorità gnoseologica: a proposito di certi assiomi sembra in effetti difficoltoso far intervenire l'idea di gruppo, ma si tratta precisamente di quelli che Euclide annovera in quanto tali; quelli invece che chiamano direttamente in causa le proprietà gruppali vengono sottaciuti e la ragione di questa reticenza consiste per Poincaré nel fatto che gli assiomi formulati in forma esplicita « sono il frutto di un'esperienza piú recente, mentre quelli sottintesi sono stati da noi assimilati per primi ». Da ciò conclude che « la nozione di gruppo esisteva prima di tutte le altre » [215]. Allora, se la ' maieutica ' esprime un ordine di priorità, anche il nostro patrimonio di idealità innate dissimula una storia: il privilegio gruppale consiste dunque in questa acquisizione ancestrale? [216].

212 *La Science et l'Hypothèse*, Parigi, Flammarion, 1968, p. 74.

213 Si noti che in *On the Foundations of Geometry* dicendo che questi sono delle convenzioni si escludeva soltanto che fossero giudizi a n a l i t i c i, non sintetici a priori (cfr. trad. franc., p. 58).

214 *On the Foundations* ..., p. 49.

215 *Ibid.*, p. 52.

216 Poincaré ne fa addirittura una panacea contro le contraddizioni: se Euclide non ha mai nutrito dubbi sulla compatibilità degli assiomi geometrici, da che cosa poteva derivare questa convinzione — si domanda — dal momento che non era in possesso di una geometria analitica? O « attribuiva alle nostre esperienze piú valore di quanto esse abbiano realmente », oppure « poiché l'idea di gruppo preesisteva in lui in potenza, n e p o s s e d e v a u n c e r t o o s c u r o i s t i n t o s e n z a r a g g i u n g e r e l a s u a n o z i o n e d i s t i n t a» (*ibid.*, p. 59, spaziatura nostra). Poincaré non risolve la questione, limitandosi a propendere per la seconda ipotesi.

La Science et l'Hypothèse non sembra escludere questa circostanza; qui leggiamo che « il concetto generale di gruppo preesiste nel nostro spirito almeno in potenza » [217]: non è dunque questo o quel gruppo particolare (il cui studio costituisce l'argomento di una geometria) a imporcisi come ' forma dell'intelletto ', bensí « l'idea latente di un certo numero [di essi], quelli », precisazione decisiva, « di cui Lie ha formulato la teoria » [218]. Eccoci dunque di fronte ad un'altra precedenza gnoseologica: in questo caso è la generalità di una forma (che evoca in modo impreciso una specie di struttura) che viene presupposta alle sue particolarizzazioni; d'altra parte la sua presenza virtuale non può significare semplicemente la sua costruibilità attraverso un assemblaggio di condizioni ideali in cui intervengono dei materiali ' puri ', la cui natura integralmente intellettuale garantirebbe una sorta d'autonomia nei confronti del mondo sensibile (per cui ogni ' possibile ' matematico può dirsi ' potenzialmente ' raggiungibile, come è per esempio il caso del continuo, costruito, appunto, grazie alla « facoltà dello spirito di creare simboli » [219]). L'idea di gruppo viene collocata piú in profondità: essa non costituisce una mera possibilità astratta, ma — esibendo le caratteristiche di una precognizione — dobbiamo considerarla insita in noi, anteriore ad ogni costruzione (o, in altre parole, innata).

In un testo successivo questa prerogativa viene circostanziata matematicamente, attribuendole il ruolo di sostrato in cui sembra esaurirsi la zona di variabilità delle geometrie in quanto costrutti possibili: « Tutti i gruppi che si possono immaginare possiederanno certe proprietà comuni, e sono precisamente queste che limitano il capriccio degli inventori; esse sono, d'altra parte, quelle che Lie ha studiato per tutta la vita » [220]. Questo sottofondo comune che, contemplando « tutti i possibili tipi di cinematiche » [221], funziona in qualche modo da principio di permanenza e determina una frontiera al di là della quale il gioco dei possibili non pare piú consentito, rappresenterebbe allora l'antefatto non

[217] *La Science et l'Hypothèse*, ediz. cit., p. 93.

[218] *Ibid.*, p. 107.

[219] *Ibid.*, p. 55.

[220] *Les fondements de la géométrie* in H. Poincaré, *Dernières Pensées*, Parigi, Flammarion, 1913 (originariamente in « Journal des savants », 1902). Nella riedizione di *Dernières Pensées* del 1963 (Flammarion) il passo citato si trova alla p. 183.

[221] *Ibid.*, p. 182.

convenzionale delle idee geometriche e dovrebbe pertanto risultare connaturato al pensiero. Ma a che cosa intende riferirsi Poincaré? In *La Science et l'Hypothèse* veniva menzionato un risultato di Lie in base al quale il numero delle geometrie compatibili con certe premesse (tra cui l'ipotesi di libera mobilità nello spazio di una figura invariabile) è limitato: « se si ammette la possibilità di movimento — concludeva Poincaré — non si potrà inventare che un numero finito (...) di geometrie » [222]. Ma se sta qui la restrizione oggettiva al ' capriccio degli inventori ', d'altra parte la ' possibilità di movimento ' (ovvero quella di stabilire congruenze tra grandezze spaziali) non costituisce forse una presupposizione reale, e pertanto una convenzione, stipulata tutt'al piú anteriormente alle altre necessarie all'edificazione di una geometria? È Poincaré stesso ad ammetterlo: « la possibilità di movimento di una figura invariabile non è una verità evidente di per se stessa, o quanto meno lo è allo stesso modo del postulato di Euclide » e risulterebbe incomprensibile ad « un abitante di un mondo in cui non esistono che fluidi » [223]. Tuttavia, dopo aver opposto in apparente contraddizione l'infinità delle geometrie concepite da Riemann attraverso la definizione della lunghezza di una curva alla scelta ristretta di quelle previste dal teorema di Lie, Poincaré rileva l'incompatibilità delle prime con l'ammissione della libera mobilità, il che gli serve per relegarle a « non essere che puramente analitiche » [224], in quanto non conformi (evidentemente perché mancano di un criterio di congruenza) ad una trattazione analoga a quella euclidea.

Che cosa significa questo criterio di refutazione? Dal momento che l'ipotesi contraria a quella su cui verte non è inconcepibile, il suo argomento non può riguardare il non contraddittorio: qui una costruzione teorica viene ricusata i n q u a n t o g e o m e t r i a e solo in tal senso può venir chiamata in causa la sua plausibilità psicologica. « Se non vi fossero corpi solidi in natura — scrive Poincaré — non esisterebbe geometria » [225]; altrove [226], aggiunge anche l'ipotesi di un adeguato apparato senso-motorio nel soggetto che deve costruirla: noi siamo in grado di farlo, come si ricorderà, perché possiamo distinguere tra mutamenti di stato e mutamenti di posizione; se è possibile immaginare il contrario (un

[222] *La Science et l'Hypothèse*, ediz. cit., p. 73.
[223] *Ibid.*, p. 71.
[224] *Ibid.*, p. 73.
[225] *Ibid.*, p. 86.
[226] *On the Foundations of Geometry*, trad. franc., p. 14.

animale immobile non avrebbe in effetti modo di distinguerli), è ad un essere simile che risulterebbe impossibile immaginare qualcosa che assomigli a una geometria. Perché un qualche costrutto possa venir riconosciuto come ' geometrico ', parrebbe dunque necessario riportarlo al metro della genesi naturale dello spazio euclideo: quanto piú ne ripercorre le mosse, tanto piú ci risulterà verosimile; ma se nulla li accomuna, sembra difficile accordare al primo carattere ' naturale ' (geometrie riemanniane) o matematico (animali senza geometria), perché in ambedue i casi è troppo lontano dalle nostre abitudini di pensiero.

La geometria è dunque costruita su convenzioni perché impegnata in ogni suo stadio a ipotecare il mondo fenomenico per un tratto piú o meno breve; non esiste allora un prologo matematico ad ogni realtà possibile e gli invarianti che si possono incontrare funzionano solo in senso relativo, perché anche al livello delle nostre esperienze primordiali rimane sempre aperta la concepibilità di altre esperienze in ambienti differenti: a questo punto che si dia il nome di ' geometria ' a una costruzione possibile attraverso cui un immaginario soggetto senziente inserito in tali ambienti possa inquadrare la forma dei fenomeni è solo una questione di gusto, mentre ciò che conta è che quella euclidea appare irrimediabilmente contaminata dalla realtà in vista della quale viene approntata.

Tutto ciò sembra revocare ai gruppi lo statuto di forme innate del pensiero, a meno di non ammettere allo stesso titolo qualsiasi nozione matematica riferibile ad un mondo esterno, o attribuir loro una posizione di privilegio per diritto d'anzianità nelle acquisizioni di contenuti ideali sollecitate dall'esperienza: sulla loro ' preesistenza ' si può invocare, in effetti, qualcosa di diverso dall'istinto dell'intelligenza di appigliarsi a una forma? Saremmo dunque tornati al punto di partenza, e la peculiarità dei gruppi risulterebbe in sostanza immotivata: restano tuttavia alcuni dettagli in grado di fornirci, forse, indizi a sostegno della loro distinzione.

Innanzitutto esiste una zona della matematica sottratta ad ogni sorta di vincolo con la realtà sensibile e pertanto non convenzionale [227]: l'aritmetica ha infatti a fare con oggetti dati da un'intuizione intellettuale

[227] Nelle due accezioni finora incontrate, infatti, l'attribuzione del carattere convenzionale presuppone sempre il riferimento ad una realtà empirica, sia che se ne appiattiscano le gibbosità per poterla riferire ad una forma ideale, sia che si adotti quest'ultima come ' campione ' a scapito di altre forme possibili.

senza che necessitino di una sollecitazione esterna che ne debba suscitare l'apprensione. In questo senso possono venir considerati contenuti ' puri ', per distinguerli da quelli della geometria che, seppure ideali al pari dei precedenti, paiono rimanere latenti in mancanza di un mondo a cui riferirli. Ora i gruppi sembrano partecipare di entrambe queste nature: esiste infatti un motivo che li accomuna all'aritmetica ed è la ' legge d'omogeneità ' secondo la quale un movimento può ripetersi senza che ne mutino le proprietà e nella quale intervengono tanto la nostra facoltà di reiterare un'azione quanto il fatto che esse continuano a compensare uno spostamento che si ripresenta. Per Poincaré è dalla « possibilità di ripetere indefinitamente un'azione » che « il ragionamento matematico trae la sua virtú » [228], quest'utima consistendo nel carattere non tautologico di quello, come testimonia il ' ragionamento per ricorrenza ', unico esemplare di ' giudizio sintetico a priori ' che Poincaré si prenda la pena di indicare esplicitamente [229]. Ma se « è grazie alla legge di omogeneità che [il ragionamento matematico] ha presa sui fatti geometrici » [230], d'altra parte essa, presupponendo l'uniformità dei fenomeni naturali senza la quale non verrebbe mai in mente a nessuno, sembra riposare interamente sull'insegnamento dell'esperienza e, in effetti, si tratta di una ' legge ' di quelli che abbiamo riconosciuto come ' spostamenti ', sicché (anche prescindendo dal fatto che per assicurare a questi ultimi un assetto gruppale è necessario il concorso di « una ridda di altre leggi analoghe ») l'apparentamento con l'aritmetica risulta frammentario.

Anche in *On the Foundations of Geometry* interveniva un motivo analogo, benché chiamato a svolgere una funzione differente: una volta effettuata la ricognizione degli spostamenti in seno alle nostre sensazioni, la possibilità di identificare due di essi comporta l'ammissione della loro ripetibilità ed « è questa circostanza che introduce il numero e consente la misura laddove regnava in precedenza la pura qualità » [232]. Infatti dal-

[228] *La Science et l'Hypothèse*, p. 88.

[229] In verità Poincaré, per screditare i suoi avversari, considererà ' giudizi sintetici a priori ' anche gli assiomi delle ' nuove logiche ': ma sembra servirsi di tale criterio solo per indicare che quest'attribuzione è quanto si deve richiedere per la loro ammissibilità, piú che addurne l'evidenza intrinseca (cfr. *Science et métode*, Parigi, Flammarion, 1909, libro II, cap. IV).

[230] *La Science et l'Hypothèse*, p. 88.

[231] *Ibid.*

[232] *On the Foundations of Geometry*, trad. franc., p. 17.

la ripetibilità di uno stesso spostamento saremo portati a considerarne i multipli, ed in seguito a concepirne la possibilità di divisione infinita, prefigurando con ciò il continuo, il quale fa pertanto la sua comparsa in geometria attraverso l'intermediazione gruppale: è una delle ragioni per cui Poincaré si oppone alla concezione di Helmoltz e Lie secondo cui una materia (una molteplicità numerica tridimensionale) è presupposta al gruppo che su essa agisce. È evidente che Poincaré non potrebbe ammetterlo se non sacrificando la veridicità della sua ricostruzione genetica, nella quale l'origine delle tre dimensioni spaziali veniva spiegata, come si ricorderà, sulla base dell'interscambiabilità di ' materie ' con permanenza della struttura gruppale: in ossequio a questo percorso d'indagine Poincaré conclude che « la forma esiste prima della materia », sfruttando in tal modo una caratteristica matematica del concetto (identificabilità di esemplari isomorfi) in sede di argomentazione filosofica [233].

I gruppi vengono cosí utilizzati, è il caso di dirlo, in quanto ' forme ' e come tali (cioè indifferenti alla materia suscettibile di occuparli) dobbiamo supporli presenti in noi, dal momento che se l'esperienza ci porta ad accorgerci del loro possesso, essa non è evidentemente in grado di suggerirci il loro statuto di ' essenze ', il quale va pertanto considerato originario, inscritto in qualche modo nella loro natura: assunzione piuttosto impegnativa che, forse proprio per la difficoltà di essere sostenuta fin in fondo, non viene assunta da Poincaré come motivo di prelazione nei confronti delle altre nozioni matematiche. Tuttavia, se è lecito trasporre in matematica l'ordine di priorità desunto in ambito gnoseologico, « le geometrie di Lie » (apparse in precedenza la trascrizione teorica diretta di un dato primordiale dello spirito) verrebbero compromesse in quanto « assoggettate alle forme dell'analisi e dell'aritmetica » [234], apparentemente imprescindibili. Ma è precisamente di queste che Hilbert si è sbarazzato: per lui « gli oggetti denominati punto, retta o piano, divengono esseri puramente logici » [235], la cui rappresentabilità intuitiva non interessa piú [236] e per i quali viene richiesto solo il rispetto

[233] *Ibid.*, p. 60. È del resto quanto abbiamo visto gli rimproverava Brunschvicg. L'assunzione dovette sembrargli troppo impegnativa se in *La Science et l'Hypothèse* Poincaré ritratterà questa spiegazione per proporne un'alternativa che non fa menzione di isomorfismi di sorta.

[234] *Dernières Pensées*, ediz. cit., p. 183.

[235] *Ibid.*

[236] Cade in tal modo ogni pregiudizio ' naturalistico ' al loro riguardo, il che

delle regole del gioco. Ma non basta: Hilbert rimprovera infatti a Lie di aver supposto la differenziabilità delle funzioni che definiscono i gruppi oltre al fatto che quello degli spostamenti sia generato da trasformazioni infinitesimali, il tutto senza precisare se il ricorso a queste ipotesi sia inevitabile, se esse rappresentino conseguenze di altri assiomi o se vadano addebitate piuttosto al metodo analitico con cui affronta l'indagine [237]. Per parte sua Hilbert sgombra la geometria da questo fardello ed assume gli insiemi come ' materia ' del gruppo. Questo smantellamento di ipotesi accessorie sembrerebbe consegnarci i gruppi nella loro essenza: ma l'apertura all'orizzonte assiomatico è ancora in grado di esibire una qualche ragione del loro privilegio?

Al contrario, ne perderemmo ogni traccia: anzi, secondo Jules Vuillemin, proprio perché « la struttura di gruppo non possiede, tra quelle algebriche, una situazione che la distingua in proprio », Poincaré sarebbe stato portato a respingere « l'idea appartenente a Lie e Klein di subordinare l'insieme delle matematiche alla nozione di gruppo » [238]. In effetti la trasparenza che si ottiene ' formalizzando ' una nozione matematica, se consente la piena presa del ragionamento su di essa, comporta sempre il prezzo della sua perdita di rilievo di fronte alle altre ammissibili con eguale diritto. Ci sembra lecito trasferire in questo contesto quanto Poincaré afferma (nel caso dell'aritmetizzazione dell'analisi) attorno all'attitudine a cui riserva il nome volutamente vago di ' logica ': proprio la genericità di questa dizione ci consente di ripetere a proposito dei gruppi (e di ogni altro concetto matematico) ciò che vien detto delle funzioni: come una volta che queste ultime siano state decomposte in

dovrebbe vietare a Poincaré di considerarli definenti una ' geometria ', come s'è visto (cfr. pp. 105-106, questo testo).

[237] D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Geometrie,* « Mathematische Annalen », LVI (1902); trad. ital. in D. Hilbert, *Fondamenti della geometria,* Milano, Feltrinelli, 1970, p. 180.

[238] J. Vuillemin, prefazione a *La Science et l'Hypothèse*, ediz. cit., p. 16. Vuillemin mette in conto un altro motivo: dopo aver individuato nella nozione di operazione un momento di contatto tra gruppi e aritmetica, afferma che il convenzionalismo geometrico impedisce a Poincaré di « proseguire la sua analisi in questa direzione », constatando l'opposizione di un'unica aritmetica di contro alle differenti geometrie concepibili. Dall'unicità dell'aritmetica la nozione d'induzione completa riceverebbe « un senso operatorio definito », precluso alla multivalenza inscritta nella struttura di gruppo. Avremo modo di vedere come Poincaré addurrà in seguito un diverso criterio per evidenziare l'eccezionalità dell'aritmetica in seno alle matematiche, in cui le ragioni esposte da Vuillemin non verranno piú tenute in considerazione.

costituenti elementari ed immesse in un ambito di generalità riesce impossibile distinguere quelle ' oneste ' dalle bizzarrie « che sembrano sforzarsi di somigliare [loro] il meno possibile » [239], allo stesso modo, polverizzando una nozione matematica in ' atomi logici ', risulterà incomprensibile il senso del costrutto che si è smontato ed esso finirà col confondersi coi tanti, parimenti legittimi, che si possono costruire accatastando arbitrariamente gli stessi materiali. Il rigore che la matematica ha conseguito tramite la sua aritmetizzazione è incrementato cosí in ragione inversa rispetto alla sua ' obiettività ': « è allontanandosi dalla realtà che essa ha acquisito questa perfetta purezza » [240]. Ma di quale realtà si tratta? In questo caso, evidentemente, di quella sensibile e finché è « l'idea vaga di continuità » a venire chiamata in causa nessuno si sognerebbe di contestare la sua provenienza intuitiva; per quanto concerne i gruppi, invece, sappiamo a quali difficoltà vada incontro la loro ' supposizione reale ' (il riscontro empirico di un contenuto innato che dovrebbe distinguere tra modelli isomorfi e no: oltretutto, se esso fosse immediatamente accessibile, perché avrebbe tardato tanto il loro riconoscimento matematico?).

Sicché né la filosofia, né la logica paiono in grado di assicurare ai gruppi una plausibile postazione di privilegio: esiste tuttavia un'altra ' obiettività ' capace di restituir loro il carattere di nozioni che « s'incontrano senza averle cercate » [241]. Richiamandosi forse a quella « realtà piú sottile, che costituisce la vita delle entità matematiche » [242], che aveva altrove contrapposto all'ottusità della logica, Poincaré afferma in effetti che « la teoria dei gruppi è, per cosí dire, l'intera matematica, spogliata della materia e ridotta a una pura forma » [243]. È significativo che l'uditorio a cui Poincaré rivolge queste parole (che non trovano riscontro in nessun altro suo scritto) sia composto da ' addetti ai lavori ': è un apprezzamento matematico quello che pronuncia, non un giudizio epistemologico, il che gli consente di abbandonare la cautela alla quale ci aveva abituati. Anche una delle sue formule preferite (« la matematica

239 I ' mostri ' generati dalla logica, appunto. Cfr. *Science et méthode*, p. 132.

240 *Ibid.*, p. 131.

241 *Ibid.*, p. 132. Cosí Poincaré scriveva a proposito delle « oneste funzioni che servono a qualche cosa ».

242 *Ibid.*, p. 133.

243 Poincaré, *Rapport sur les travaux de M. Cartan*, « Acta Mathematica », XXXVIII (1921), p. 145.

è l'arte di dare lo stesso nome a cose differenti ») viene finalmente circostanziata: la « similitudine di nome » deve infatti rispecchiare una « similitudine di fatto » e ciò significa richiedere che le ' cose ' differiscano quanto alla materia, ma non alla forma. Ma, ancora, in che cosa consiste questa comunanza di forma che sopravvive alla diversità di materia? « Essa verte sul fatto che ogni teoria matematica è, in ultima analisi, lo studio delle proprietà di un gruppo di operazioni, vale a dire di un sistema formato da certe operazioni fondamentali e da tutte le combinazioni che se ne possono ricavare »[244]. Se un'altra teoria presenta delle operazioni che si combinano secondo le medesime leggi, « le due teorie potranno essere sviluppate in un perfetto parallelismo » e basterà un semplice artificio linguistico per assicurar loro un'identità completa: « si dice allora che i due gruppi di operazioni sono isomorfi o anche che essi hanno la stessa struttura »[245].

A queste premesse Poincaré fa seguire un resoconto dei principali progressi registrati dalla teoria dei gruppi: a rivelare il valore della nozione è allora semplicemente la constatazione del suo impatto su un sapere già articolato e non sul territorio indifferenziato dei possibili logici o su quello vergine delle finzioni epistemologiche e delle ricostruzioni psicogenetiche. Collocati nel vivo della ricerca, i gruppi sono in grado di esibire la loro importanza, la quale resta matematica ossia va riferita ad uno stadio evoluto della scienza: cos'altro potrebbe costituire la ' vita ' di una nozione? D'altra parte, che tutto ciò non rientri nelle competenze della filosofia, che a questa sia sottratta la possibilità di un discorso qualitativo sull'interesse matematico di un concetto o di un metodo, sembra imputabile ai limiti angusti in cui viene costretta dall'ossessione del ' primitivo ' che condiziona l'intero dibattito epistemologico ed a cui Poincaré, suo malgrado, non riesce a sottrarsi: adombra, è vero, un *esprit de finesse*, sorta di sentimento estetico capace di rivelarci il piano architettonico che sta a monte del semplice agglomerato dei costituenti elementari di un edificio teorico o il senso di una dimostrazione al di là

244 *Ibid.* Le citazioni si riferiscono alle pp. 137-138. Qui ' gruppo ' sembra dover venire inteso in senso matematico; poco dopo infatti Poincaré aggiunge: « Se allora si spoglia la teoria matematica da quanto appare come un accidente, cioè la sua materia, non resterà che l'essenziale, ovvero la forma; e questa forma, che costituisce per cosí dire lo scheletro solido della teoria, sarà la struttura del gruppo ».

245 *Ibid.*, p. 138, spaziatura nostra. L'unica struttura considerata sembra in tal modo essere quella di gruppo, in conformità alla prospettiva di Klein.

della correttezza dei suoi passaggi, ma se lo fa è solo per opporlo alla cecità della logica a cui simili virtù sono inaccessibili. Inoltre, come ogni intuizione, è incomunicabile e se ne può soltanto postulare l'intervento. Cosí tutto rimane nel vago della metafora: l'unità dell'individuo è altra cosa dell'insieme delle sue cellule, come la condotta di una partita di scacchi non si riduce alla conoscenza delle regole del gioco [246]. D'altra parte, la parola ' intuizione ' è troppo compromessa nella discussione sui fondamenti per poterla trasferire alla lettera in questo contesto.

Quanto al punto di vista astratto a cui è improntata la teoria dei gruppi, esso sembra legittimato — se non addirittura richiesto — dalla particolare natura della nozione (che, come sappiamo, funziona in qualità di ' essenza ' fin dalla sua prima apparizione naturale), ma appare difficilmente traducibile in un'istanza metodologica: cosa significherebbe, si chiede infatti Poincaré, fare del resto della matematica ciò che Hilbert ha fatto della geometria? Consegnandola ad un puro gioco di simboli, finiremmo, da capo, col livellare ogni disparità d'interesse tra tutte le costruzioni possibili, per ripristinare la quale occorrerebbe nuovamente far ricorso all'istinto del matematico; ridurre le matematiche ad una forma vuota significa allora mutilarle, perché la comprensione della loro ' realtà profonda ' risulterebbe preclusa [247]. Ma non è tutto: anche quella ' di superficie ' verrebbe meno. Infatti una cosa è la tendenza assiomatica d'inizio secolo, un'altra il riduzionismo dell'età del rigore e questa distinzione ha un preciso contraccolpo epistemologico: un semplice assemblaggio di condizioni ai cui termini ci si vieta di assegnare qualsiasi significato rappresenta una pura virtualità e, fintantoché non è mostrato esente da contraddizioni, non gli si può attribuire esistenza matematica. Sotto questo profilo un sistema d'assiomi, funzionando da ' definizione mascherata ' delle entità simboliche che vi compaiono, non rappresenta che una c o n v e n z i o n e: veniamo cosí a conoscere una terza accezione accordata da Poincaré a questa parola [248].

3. - Tra gli itinerari ontologici dell'assiomatica.

C'è da domandarsi perché Poincaré dimostri tanto zelo nel rispetto delle regole del formalismo (di cui è tutt'altro che disposto a condividere

[246] Cfr. *Science et méthode*, pp. 133-4 e p. 158.
[247] Cfr. pp. 158-159 (*ibid.*).
[248] Cfr. p. 160 (*ibid.*).

l'impostazione di fondo): una ragione c'è, ed è costituita, come vedremo, dalla possibilità di assicurare *ab intra* una porzione di matematica non convenzionale (nel senso appena incontrato).

L'intera faccenda verte sul conferimento della qualifica di ' giudizio sintetico a priori ' al principio d'induzione completa. In un primo tempo questa attribuzione si basa su una sorta di esperimento mentale che stabilisce la differenza del principio dagli assiomi della geometria: mentre questi si possono dire convenzionali in quanto la loro negazione è concepibile, se si tentasse di fare a meno del principio d'induzione e « di fondare — negando questa proposizione — una falsa aritmetica analoga alla geometria non euclidea, non vi si riuscirebbe » [249]. D'altra parte il principio figura tra gli assiomi che Peano ha formulato per l'aritmetica e per quanto costui attribuisca ai termini che vi compaiono il loro significato ordinario (che sembra chiamato a garantire la verità del sistema), stabilisce l'indipendenza degli assiomi modificando, appunto, quel significato attraverso il ricorso a modelli desunti dai numeri reali e dai complessi [250]. La ' proposizione contraria ' è dunque concepibile: Poincaré potrebbe forse obiettare che si tratta di un'interpretazione troppo artefatta perché si possa « costruire su di essa un edificio teorico » [251] o che il modello su cui si fonda presuppone di fatto l'insieme dei naturali (inclusa la possibilità di ragionare su di essi ' per ricorrenza '); ma dal momento che non ne fa menzione è presumibile che non riferisca il suo criterio di evidenza a una circostanza di questo tipo. Comunque stiano le cose, con il trasferimento del concetto di convenzione all'interno della matematica (in cui vien meno ogni legittimazione psicologica) Poincaré muterà strategia: ciò che contesta in questo frangente è che si possa considerare il sistema peaniano come definizione implicita dei numeri naturali.

Perché una ' definizione per postulati ' possa venir accettata (tralasciando il problema della caratterizzazione univoca dei termini indefiniti, che non gli interessa), Poincaré ritiene infatti che essa debba venir corredata da una prova di coerenza [252]. Come si effettua una simile dimostra-

[249] *La Science et l'Hypothèse*, p. 74. Il fatto che il principio d'induzione non sia analitico proviene dalla sua irriducibilità a quello d'identità.

[250] G. Peano, *Sul concetto di numero - Nota 1*, « Rivista di matematica », I (1891), p. 91.

[251] *La Science et l'Hypothèse*, p. 74.

[252] Ogni sistema di postulati (Poincaré adotta il termine 'assioma' quan-

zione? In mancanza di un ' esempio ' che soddisfi gli assiomi, si dovrà mostrare che le conseguenze di questi non presentano contraddizioni; ma per far questo, se le conseguenze (come nel nostro caso) sono in numero infinito, non c'è altro metodo se non il ricorso a quel principio d'induzione che si tratterebbe, appunto, di giustificare: flagrante petizione di principio. Non resta allora che ammettere questi assiomi a titolo di verità evidenti, il che equivale a dire che essi suppongono il significato dei termini che impiegano e non possono pertanto venir considerati una loro definizione implicita, ossia una convenzione: è dunque questa circostanza metamatematica, che Poincaré si guarda bene dal promuovere a principio ispiratore di un'eventuale teoria della dimostrazione, che assicura all'aritmetica una posizione d'eccezionalità in seno alle matematiche [253].

Tutto ciò non risolve per altro la vertenza con i logicisti, per i quali la non contraddittorietà ' sulla carta ' non costituisce una prova attendibile di esistenza per un concetto matematico; i materiali primitivi con cui opera la logica non vanno infatti considerati sprovvisti di senso, perché è precisamente su questo senso che riposa la verità dell'intero edificio: semplicemente, si tratta di evidenze differenti da quelle poste alla base dell'aritmetica (che tuttavia vi si deve ricondurre, facendo arretrare la frontiera delle ' verità prime '); cosí anche l'idea di definizione implicita (che lascia aperto il gioco a una pluralità d'interpretazioni per non occuparsi che delle relazioni sussistenti tra entità ipotetiche) sembra estranea a quest'ordine di pensiero [254]; sennonché altre petizioni di prin-

do si assume come evidente) è in questo senso (ovvero in quanto sistema ipotetico-deduttivo, prima che come definizione implicita) una convenzione: « per avere il diritto di porre un sistema di postulati occorre che ci si sia assicurati che essi non sono contraddittori » (*Science et Méthode*, pp. 199-200).

253 Cfr. pp. 160-163 (*ibid.*).

254 Cfr. L. Couturat, *Définitions et démonstrations mathématiques*, « L'Enseignement mathématique », VII (1905): « La *definizione per postulati* non si applica a una sola nozione, bensí ad un sistema di nozioni; essa consiste nell'enumerare le relazioni fondamentali che le uniscono e che permettono di dimostrare tutte le loro altre proprietà. (...) Ora una tale definizione non è una definizione in senso proprio, dal momento che suppone al contrario che le nozioni in questione siano indefinibili. (...) È dunque un abuso della parola *definizione*; tutto ciò che si può dire è che i postulati *determinano* il senso delle nozioni prime, per lo meno in una certa misura; abbiamo visto infatti che in generale non lo determinano completamente, perché il medesimo sistema di postulati può ricevere piú interpretazioni » (p. 108, spaziatura nostra).

Un atteggiamento di questo tipo, come vedremo, è condiviso dalla scuola italiana.

cipio viziano irrimediabilmente, secondo Poincaré, i tentativi logicisti di definizione ' diretta ' dei naturali e di dimostrazione del principio d'induzione.

Ciò gli consente di affermare l'irriducibilità dell'aritmetica ai princìpi della pura logica, precisando in tal modo il rilievo epistemologico che la prima riveste, distinguendosi per un verso dai sistemi ipotetico-deduttivi che, se recingono una zona operatoria restano in debito di realtà circa gli enti destinati ad occuparla, per l'altro dalla logica che, se le è anteriore nell'ordine del discorso, è tuttavia incapace di accoglierla valendosi delle sue sole risorse. D'altra parte, la non-convenzionalità dell'aritmetica veniva desunta dall'impossibilità di provarne la coerenza attraverso ragionamenti metamatematici e questo tipo d'approccio era indicato come l'unico praticabile a causa dell'inservibilità della ' dimostrazione attraverso un esempio ' nel caso del sistema d'assiomi peaniano. È la constatazione che una successione finita di numeri naturali non può fungere da modello che motiva agli occhi di Poincaré questa circostanza: « è impossibile dimostrare gli assiomi per qualche numero intero senza dimostrarli per tutti » [255], da cui la rinuncia, appunto, a questo metodo dimostrativo.

Ma proprio l'idea di una dimostrazione ' diretta ' del tipo di quella preconizzata da Hilbert era ben lontana dall'essere recepita, e la stessa opportunità di eleggere a ' problema matematico ' la compatibilità degli assiomi aritmetici non era condivisa da tutti; cosí, all'indomani della comunicazione hilbertiana al Congresso Internazionale dei Matematici del 1900, Peano e Padoa dichiarano il problema risolto [256], palesando il loro disaccordo attorno all'impostazione che ne veniva data da Hilbert: infatti, mentre « le contraddizioni o le dipendenze di proposizioni non possono venir dimostrate se non attraverso ragionamenti deduttivi » — scrive Padoa — « le non-contraddizioni o le indipendenze non possono venir dimostrate che per *constatazioni* » [257], accertando cioè se un'interpretazione dei simboli indefiniti della teoria in questione verifica o meno le sue proposizioni. Siamo cosí ricondotti alle ' dimostrazioni attraverso un esempio ': sennonché la soluzione di Padoa non è una delle piú felici, dal momento che la coerenza del suo sistema d'assiomi per gli interi re-

[255] *Science et méthode*, pp. 178-179. Cfr. anche la successiva nota 258.

[256] Cfr. A. Padoa, *Le problème N° 2 de M. David Hilbert*, « L' Enseignement mathématique », V (1903), p. 85.

[257] *Ibid.*, p. 90.

lativi viene fatta poggiare su quella del corrispondente dominio intuitivo [258], il che non è evidentemente ciò a cui pensava Hilbert e rappresenta piuttosto l'analogo della ' chiave di lettura ' che Peano allegava al proprio sistema assiomatico, senza per altro assumerla apertamente come ' prova ' della sua coerenza. In effetti, nella versione del sistema che Padoa presenta al Congresso Internazionale di Filosofia dello stesso anno, la medesima interpretazione è proposta, molto piú prudentemente, a titolo di soccorso intuitivo inservibile nella teoria, giacché questa si occupa unicamente della « conoscenza formale delle relazioni tra i simboli » [259]: un ' commento ', insomma, che dichiara quale sistema d'idee si è voluto rappresentare, mentre la sua funzione di garante della compatibilità degli assiomi è completamente sottaciuta; essa non è dunque escogitata in vista di servigi di questo tipo: semplicemente Padoa ritiene che risponda in modo implicito al problema sollevato da Hilbert (in pratica, vanificandolo), sicché questo — come s'è detto — non viene riconosciuto come tale, ossia come compito con cui la comunità matematica è chiamata a cimentarsi.

Nondimeno, le premesse di metodo che Padoa fa precedere all'enunciazione del suo sistema di postulati possono esser ritenute un manifesto della concezione dell'assiomatica di quel periodo. Le caratteristiche di una ' teoria deduttiva ' vi sono chiaramente delineate: nell'allontanamento, innanzitutto, dalla ' realtà ' che ne era alla base, perché, quale sia stata la motivazione psicologica che ha presieduto alla sua formulazione, non si può far assegnamento su di essa nello svolgimento della teoria. Nell'assetto ' logico ' di questa « scompare ogni questione rela-

[258] Di fronte ad un'interpretazione di questo tipo, Poincaré avrebbe avuto qualcosa da obiettare? Apparentemente no, dal momento che far poggiare la coerenza dell'aritmetica ' simbolica ' su quella dell'aritmetica intuitiva significa considerare quest'ultima portatrice della verità della prima, il che Poincaré certo sottoscriverebbe. Si è visto, tuttavia, come dichiarasse inservibile il ricorso a un modello come dimostrazione di coerenza del sistema di Peano (cfr. p. 115): in effetti una soluzione del tipo di quella prospettata da Padoa avrebbe comportato l'ammissibilità di un infinito attuale come dato del pensiero concepibile in quanto tale, oppure — piú semplicemente — sarebbe risultata insoddisfacente rispetto ad un punto di vista ' formalista ', che è quello in cui Poincaré stava argomentando in quel frangente.

[259] A. Padoa, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*, in *Bibliotèque du Congrès International de Philosophie*, sezione III: *Logique et Histoire des Sciences*, Parigi, Colin, 1901, p. 319.

tiva alla semplicità delle idee e all'evidenza dei fatti »[260], ovvero al ' concreto ' che importava originariamente di rappresentare; è invece lecito pensare di stare operando su un cumulo di convenzioni, deinterpretando il sistema dei postulati: dal punto di vista deduttivo « possiamo immaginare che i simboli non-definiti siano completamente sprovvisti di significato » e che le loro proprietà non dimostrate « non siano che condizioni alle quali i simboli non-definiti vengono assoggettati »[261].

La riappropriazione del ' concreto ' potrà essere attuata a patto di collocarla tra gli altri modelli della teoria: il suo sistema di simboli non definiti andrà allora considerato come l'astrazione da tutte le interpretazioni di cui è suscettibile mentre la teoria verrà detta ' generica ' dal momento che raduna sotto di sé una molteplicità di « teorie speciali », situazione sulla quale la legge di dualità della geometria proiettiva è chiamata a testimoniare[262].

Al di là delle enunciazioni epistemologiche, la lezione ' matematica ' di queste considerazioni metodiche verte pressoché interamente sulle questioni d'irriducibilità, di cui Padoa trasferisce il procedimento dimostrativo collaudato a proposito degli assiomi al caso del sistema dei simboli non definiti: questo viene detto irriducibile se nessuno dei simboli è rappresentabile attraverso una combinazione dei restanti, che costituirebbe, appunto, la sua definizione ' nominale ' (esprimibile cioè per mezzo di un'identità): l'unica, del resto, contestuale al sistema. Di quelle ' implicite ', la scuola italiana si mostra in questa circostanza piuttosto restia a parlare: Peano non le annovera neppure tra le ' definizioni matematiche ' a cui per altro dedica il suo intervento, mentre se Burali-Forti lo fa è solo per dichiararne l'inferiorità rispetto a quelle ' nominali '; Padoa, per parte sua, sembra ammetterle di fatto senza riconoscerle di nome[263].

Questa riluttanza sembra dover essere addebitata alla difficoltà di considerare una ' dichiarazione di significato ' ciò che lascia aperto il gioco a una plurivocità d'interpretazioni, imbarazzo ragionevole finché le ' teorie deduttive ' vengono concepite come trascrizioni simboliche di

[260] *Ibid.*

[261] *Ibid.*, p. 318.

[262] Cfr. pp. 319-320 (*ibid.*).

[263] Cfr. G. Peano, *Les définitions mathématiques* (*Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, III, cit.) e C. Burali-Forti, *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel* (*ibid.*).

' realtà ' autosussistenti. La circostanza che la presa del simbolismo sul dominio concreto che è destinato a descrivere sia soltanto parziale, poiché di fatto abbraccia una moltitudine di situazioni differenti (quanto alla loro dimensione intuitiva — che è poi quella ' reale ' —, dal momento che quanto alla forma esse sono apparentate in modo più o meno stretto [264]), appare insomma il costo della transizione dall'intuitivo al formale, una deficienza, cioè, insita nello strumento linguistico: un'evenienza a cui adeguarsi piuttosto che una scelta di metodo.

Sembra essere pertanto un'ipotesi ontologica l'ostacolo all'ammissibilità delle definizioni implicite: solo sacrificando quel referente privilegiato che in un modo o nell'altro regge le sorti di verità del sistema d'assiomi allestito a sua misura, il senso dei termini indefiniti potrà stazionare internamente al testo, affrancandolo dai presupposti di realtà che vi s'insinuavano. È la strada del nominalismo, che solo Pieri, tra gli italiani intervenuti al Congresso di Filosofia, appare disposto a seguire compiutamente: per lui questa presa di posizione non rappresenta che il termine naturale di una tendenza evolutiva che ha condotto le matematiche, in particolare la geometria, a sbarazzarsi dell'assoggettamento all'intuizione per « consolidarsi sempre piú *come lo studio di un certo ordine di relazioni logiche* » [265]. Come delimitazione di un campo d'indagine, gli assiomi non sono piú, allora, la contestabile ' definizione reale ' di qualcosa, ma la semplice indicazione della funzione d'uso di simboli senza altro significato; a questo punto considerarli una ' definizione ' è soltanto una convenzione terminologica: « si dirà — scrive Pieri accordando al termine un'accezione ' piú ampia ' dell'ordinaria — che i simboli primitivi non sono definiti se non dai postulati. In effetti questi ultimi attribuiscono a questi concetti certe proprietà che sono sufficienti a caratterizzarli in vista dei fini deduttivi che ci si propone » [266]. Le interpretazioni interverranno in un secondo momento: al loro proposito Pieri rileva come « argomentando (...) su contenuti variabili » si conducano

[264] In effetti l'isomorfismo tra i modelli di un sistema di postulati verrà considerata una caratterizzazione soddisfacente di quello che si tratta di delimitare (benché per una ricognizione precisa della nozione di categoricità si dovrà attendere ancora qualche tempo): ma ciò chiarisce semplicemente i termini del problema, senza attenuare (anzi accentuando) la sperequazione tra intuitivo e simbolico.

[265] M. Pieri, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique* (*Bibliotèque* ..., cit.), p. 368.

[266] *Ibid.*, p. 378 (in nota).

ad « una sola dottrina generale e astratta piú ordini di cose concrete e particolari » [267]. L'obiettivo primario del dispositivo assiomatico non consiste tuttavia in questa economia di pensiero: infatti « un buon algoritmo ideografico » rappresenta in primo luogo « uno strumento idoneo a guidare e disciplinare il pensiero, a escludere le ambiguità, i sottintesi, le restrizioni mentali, le insinuazioni e altri difetti pressoché inseparabili dal linguaggio ordinario » [268], dichiarazione che avrebbe potuto venir sottoscritta dall'intera scuola italiana, dal momento che ne esprime l'orientamento di fondo; in effetti essa mostra al Congresso di Filosofia (in cui la fa da padrone) un contegno tutto sommato unitario: fin qui sono rilevabili al suo interno solo differenze di sfumatura (circa i tempi d'intervento dei contenuti ' concreti ', per esempio), mentre vere e proprie disparità d'opinione si evidenzieranno solo successivamente, precisamente attorno all'argomento verso cui i suoi esponenti ostentano in questo frangente la piú assoluta indifferenza, ovvero la coerenza di un sistema di postulati. Quando essi si troveranno obbligati dall'andamento del dibattito epistemologico a pronunciarsi sulla questione, circa la non contraddittorietà degli assiomi dell'aritmetica i pareri saranno discordi, ma nessuno vorrà ammettere la liceità di una dimostrazione ' diretta ' della loro compatibilità.

È quanto proprio Pieri ribadisce a chiare lettere: se dire che delle proposizioni sono contraddittorie tra loro significa dire che non esiste nessun ' soggetto ' che le verifica simultaneamente, dimostrare la loro coerenza equivarrà a constatare l'esistenza di un *quid* che le convalidi ad un tempo. Piú precisamente: se le proposizioni in questione appartengono ad un sistema deduttivo Γ, la dimostrazione richiesta verrà assicurata rintracciando « un'*interpretazione* delle idee primitive di Γ che manifesta tutte le proprietà enunciate dalle proposizioni [considerate] », interpretazione che deve vertere su un « dominio Δ di conoscenze razionali (comprendente i concetti e gli assiomi fondamentali della Logica, sui quali riposa ogni deduzione) », purché questo dominio « non comprenda alcuna di quelle proposizioni tra le sue premesse o fondamenti deduttivi, e la consistenza dei suoi principî sia *già stabilita* o *accordata a priori* » [269]. Ragionando allora all'interno dei suoi confini si dovrà « stabilire apodit-

[267] *Ibid.*, p. 381.

[268] *Ibid.*

[269] M. Pieri, *Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmetique,* « Revue de Métaphysique et de Morale », XIV (1906), p. 197.

ticamente » la non contraddittorietà delle proposizioni in esame riducendole ad essere « una *conseguenza necessaria dei principi di* Δ; un fatto razionale, insomma, dipendente da questi principî »[270]. Una transazione tra sistemi deduttivi (dunque tra dati omogenei) è l'unica via d'uscita per vertenze di questo genere, dal momento che « il procedimento che consisterebbe nel provare *per via diretta* che le premesse non implicano contraddizione (...) incontra difficoltà molto gravi »[271]. L'infinità delle conseguenze possibili imporrebbe infatti di ragionare 'per ricorrenza', ma Pieri dubita della legittimità di questo passo, perché nulla lo assicura di avere a fare con una successione numerabile, a cui cioè sia applicabile il principio d'induzione. In effetti finché non si scandaglierà il meccanismo deduttivo tutta la faccenda resta nel vago: sta di fatto che Pieri individua nella logica (in quanto antecedente d'ogni discorso) il « residuo di principî in cui non si potrà escludere per via deduttiva la presenza latente di contraddizioni: della loro compatibilità non si potrà avere che una certezza *induttiva o storica* »[272]. La circostanza che entrambi questi criteri facciano difetto proprio nel caso dei principî logici (che sono a quel tempo argomento di controversia precisamente riguardo alla loro affidabilità e, di conseguenza, suscettibili di rimaneggiamenti) sembra passare inosservata. In realtà essi non rappresentano il 'minimo di rischio' in fatto di sicurezza, ma l'oggetto di un atto di fede che la loro posizione di « premesse necessarie al discorso » rende inevitabile[273].

Per quanto concerne la coerenza degli assiomi aritmetici, Pieri — come Padoa — ritiene che la faccenda vada archiviata perché, in sostanza, già risolta. Le loro ragioni sono tuttavia differenti: per Pieri non è il rinvio ad un dominio di contenuti intuitivi che garantisce la verità dell'allestimento simbolico che li esprime[274], ma la consegna ad una teoria

270 *Ibid.*

271 *Ibid.*, p. 199.

272 *Ibid.*, p. 200.

273 Cfr. p. 200 (*ibid.*).

274 Viceversa questa sembra esser stata, oltre a quella di Padoa, anche l'opinione di Peano. Si veda ad esempio il suo articolo *Le definizioni in Matematica* (Barcellona, Publicaciones de l'Institut de Ciences, 1911), dove scrive: « Alcuni autori proposero, dato un sistema di proposizioni, di provarne la compatibilità: e fra questi Hilbert. Ma questa prova è inutile se noi prendiamo le proposizioni da un soggetto reale. (...) La prova di consistenza sarebbe necessaria se si prendono le proposizioni a caso, e non si studia un qualche soggetto reale » (p. 13). Cfr. anche, dello stesso autore, *Super theorema de Cantor - Bernstein*, « Rivista di Matematica », VIII (1902-1906), p. 143: « Nos cogita numero, ergo numero es ».

(la logica) in grado di fabbricarne un modello. Nel far questo, per altro, non si tratta che ufficializzare una situazione di fatto: grazie ai lavori di Cantor, Frege, Burali-Forti e Russell gli assiomi possono venir agevolmente interpretati negli insiemi. Che i concetti di cui fa uso contengano in qualche modo « frammenti dell'idea generale di *numero* » [275] non rappresenta per Pieri il ricorso clandestino a nozioni aritmetiche, come sosteneva Poincaré: in primo luogo, senza la relazione d'appartenenza, i quantificatori, l'idea di classe, la distinzione tra singolare e plurale, nessun discorso sarebbe possibille (il che legittima l'attribuzione di queste espressioni alla ' logica pura '); secondariamente, « non si potrebbe mai costruire un nuovo concetto per mezzo di altri se questi non contenessero già, dispersi, certi elementi che debbono concorrere alla formazione di quello » [276]. D'altra parte, per condurre in porto la sua dimostrazione, Pieri è obbligato ad un'assunzione piú impegnativa, l'assioma dell'infinito, di cui Poincaré contesterà la natura ' analitica ' perché solo una valutazione d'evidenza potrebbe a parer suo giustificarne l'adozione, il che dimostra come si abbia a fare con un ' giudizio sintetico a priori ' di cui non si può alterare il carattere semplicemente perché compare all'inizio di un trattato intitolato alla logica [277].

I contendenti paiono cosí non volersi intendere: ciò che appare retrospettivamente sconcertante è che si siano attardati su questioni di nessun conto come la qualifica di analiticità o sinteticità [278]. Quella che avrebbe dovuto essere in grado di sottrarsi a prescrizioni ideologiche di questo stampo era quanto di fatto Pieri aveva adottato nella sua costruzione di un modello aritmetico, ovvero la teoria degli insiemi: in quanto teoria matematica, in effetti, non si vede perché le si debba richiedere di non sconfinare dal territorio dell'analiticità; d'altra parte essa sembra troppo potente per venir considerata la porzione teorica ineliminabile da

275 Pieri, *Sur la compatibilité*, cit., p. 202.

276 *Ibid.*

277 Cfr. *Science et méthode*, p. 175.

278 Di fronte a dispute terminologiche di questo tenore, solo Padoa sembra propenso a considerarle per quello che sono: in effetti, tutto sta nell'accordarsi su ciò che si deve denominare ' logica ' e la riducibilità ad essa dell'aritmetica, dipendendo dalla demarcazione di confine in cui recingere il dominio di sua competenza, è una faccenda convenzionale (*D'où convient-il de commencer l'arithmétique?*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XIX, 1911). A conclusione dell'articolo, nel valutare i benefici di una riduzione dell'aritmetica alla logica (ossia l'ottenimento di « due branche di una medesima scienza »), Padoa si chiede: « a che pro confondere oggi ciò che domani sarà necessario distinguere? » (p. 554).

ogni discorso matematico, benché il riconoscimento della sua autonomia dalla logica risulti difficoltoso e lo stesso Zermelo, nell'assiomatizzazione che ne allestisce nel 1908, sembri accordare ai suoi princìpî il carattere di evidenze naturali accollando loro il fardello dei fondamenti [279]. Tuttavia è proprio sulle ragioni di questa assiomatizzazione che sul versante opposto si scorge un motivo di diffidenza: Zermelo, osserva Poincaré [280], non ammette nessuna teoria precedente a quella degli insiemi, ma d'altra parte si dichiara incapace di dimostrarne la coerenza. Pertanto, per poter concedere ad essa un ruolo fondante, sarà necessario considerare gli assiomi alla stregua di verità intuitive: eppure, nel congegnare il suo sistema, Zermelo deve impegnarsi in una refutazione di evidenze perché queste, lungi dal garantire la coerenza della teoria, si sono mostrate generatrici di contraddizioni. Gli assiomi vengono cosí concertati, per ammissione dello stesso Zermelo, al fine di impedire l'insorgenza dei paradossi rinvenuti a quel tempo, escludendone il meccanismo di formazione dalle regole a cui, d'ora in avanti, dovranno sottostare gli insiemi: la sicurezza che offre il sistema è dunque relativa a questa circostanza e pertanto del tutto avventizia e poco rassicurante per un atteggiamento fondazionale in chiave ' legalista '. D'altro canto, volendo ricostruire per il piú lungo tratto possibile l'edificio cantoriano, Zermelo deve ammettere altre evidenze, legittime senza dubbio per una concezione ' realista ' che adegua il testo assiomatico a un dato del pensiero e agli occhi della quale appare insostenibile ciò che in seguito diverrà consuetudine, ovvero il limitare il ricorso all'assioma della scelta soltanto dove risulti indispensabile. Quella di Zermelo è infatti un'attitudine descrittiva, apparentabile in questo senso a quella peaniana: per entrambi, scopo di un'assiomatizzazione è di precisare e sistematizzare dei contenuti intuitivi, ma se nel caso dell'aritmetica il modello presupposto poteva ancora venire assunto in funzione di garante del testo destinato a circoscriverlo, in quello degli insiemi ciò appare alquanto difficoltoso.

Innanzitutto non si tratta qui di esplicitare un'intuizione, piuttosto di rettificarla; inoltre, non si può parlare di un modello che la teoria dovrebbe rappresentare perché l'assiomatizzazione muta abbastanza radicalmente l'idea intuitiva di insieme ed è architettata precisamente a questo scopo: cosí la semantica iniziale della teoria viene modificata

[279] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, « Mathematische Annalen », LXV (1908), p. 261.

[280] Cfr. *Dernières Pensées*, ediz. cit., p. 20.

con l'espunzione di entità su cui ora, semplicemente, si tace, dal momento che al sistema d'assiomi la loro trattazione è preclusa. Per quanto riguarda la caratterizzazione di un ambito del sapere che questo è in grado di fornire, il requisito di univocità o indiscernibilità strutturale del rappresentato veniva concepito come presa adeguata del simbolico sul ' reale ': ma la categoricità sembra necessitare di una presupposizione insiemistica innanzitutto per ambientare e far funzionare la modellistica della teoria; inoltre, nel caso dell'aritmetica o della geometria, essa veniva assicurata da sistemi del secondo ordine, in cui il concetto di insieme viene in certo modo richiesto in via preliminare. La considerazione degli assiomi della teoria degli insiemi come definizione implicita appare pertanto disagevole; d'altra parte anche una loro elementarizzazione si rivelerà insoddisfacente, in quest'ottica, per i risultati di Skolem degli anni Venti.

La coerenza del sistema si presenta ancor più problematica: non si vede come poterla affidare a una teoria testimone in grado di sorreggerne il peso, né il modello intuitivo che essa è destinata a riprodurre può fornire una valida base di sostegno, perché l'evidenza contenutistica dei suoi oggetti rimane dubbia e d'altra parte questa assiomatizzazione — come si è già detto — non è volta tanto al rispecchiamento di un ' concreto ', quanto ad emendare l'intuizione che inizialmente lo consegnava, facendo dipendere la sua intelligibilità dal testo e non viceversa.

Per la sua posizione strategica in seno alle matematiche, la teoria degli insiemi è ' fondante ', ma la garanzia della sua coerenza resta un atto di fede troppo impegnativo per chi vada in cerca di certezze. Nondimeno Hilbert sembra aver coltivato la speranza di renderla inattaccabile attraverso una dimostrazione di non contraddittorietà del tipo di quella proposta per i postulati dell'aritmetica: al pari di questi, anche i principî della teoria degli insiemi gli paiono ' far eccezione ' al procedimento adottato altrove per provare la compatibilità di un sistema d'assiomi, ossia quello di ricondurlo ad un'altra teoria, perché nessun rinvio sembra in questi casi praticabile [281]. La soluzione sarà allora quella di fare del sistema un oggetto sintattico e della coerenza un suo requisito formale, sopprimendo ogni sua funzione contenutistica. Questo rito sacrificale è volto essenzialmente a fondare: il tes-

[281] Cfr. D. Hilbert, *Axiomatisches Denken*, « Mathematische Annalen », LXXVIII (1918), p. 412.

suto logico, svuotato dal riferimento ad entità esterne (inservibili alla giustificazione della teoria), lascia aperto il rinvio ad un altro concreto, il sistema dei segni con cui è costruito, passibile di uno studio matematico che adotti strumenti dimostrativi la cui affidabilità è fuori discussione. La metamatematica si configura in questo modo come disciplina *sui generis*, dotata di tecniche sofisticate e dedicata esclusivamente a fornire garanzie: la questione dei fondamenti, portata con ciò ad un livello di precisione sconosciuto, esaurisce allora l'argomento 'filosofia della matematica', condizionando il dibattito epistemologico ben oltre il programma prospettato da Hilbert e l'accertamento della sua irrealizzabilità. Il rilievo del metodo assiomatico come strumento di comunicazione e d'indagine passa cosí in secondo piano: l'affrancamento di un sistema di postulati da interpretazioni particolari rappresenta innanzitutto la possibilità di renderlo accondiscendente ad un trattamento metamatematico volto non a provarne l'efficacia, ma a giustificarne in linea di diritto la legittimità attraverso una dimostrazione di coerenza.

La richiesta di completezza che solitamente le viene associata, benché conforme a questo atteggiamento catartico (esigendo che ogni asserto risulti dimostrabile o refutabile, essa conferisce alla teoria un carattere compiuto, senza far riferimento all'universo, difficilmente governabile in quest'ottica, degli oggetti che soddisfano gli assiomi), appare in realtà solo tardivamente in Hilbert: la completezza che compare (sporadicamente, per altro, e senza che venga data alcuna strategia per affrontare il problema) al tempo dell'assiomatizzazione della geometria rappresenta tutt'altro: è una domanda d'adeguatezza all'insieme di conoscenze che un sistema d'assiomi è destinato a ricoprire esaustivamente (per cui esso « deve bastare alla dimostrazione di tutte le proposizioni geometriche » [282]); nella medesima accezione ma in forma implicita riappare successivamente accanto a quelli che sono indicati espressamente come i requisiti fondamentali di una teoria assiomatica, cioè la non contraddittorietà e l'indipendenza [283], e solo un decennio

[282] D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, « Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung », VIII (1900), p. 181.

[283] « Alla base dell'ordito concettuale stanno poche proposizioni speciali del dominio scientifico che da sole bastano a ricomporre l'intero complesso per mezzo dei principî logici » (*Axiomatisches Denken*, p. 406, spaziatura nostra). Un sistema assiomatico è qui concepito come riorganizzazione prospettica di un settore del sapere, ossia in modo contenutistico o, come l'abbiamo chiamato, 'descrittivo': ma l'evidenza dei concetti posti in gioco non è sufficiente

piú tardi, quando verrà trasferita in un contesto formale dai contorni sufficientemente precisati, potrà tradursi nella richiesta di chiusura deduttiva di una teoria [284].

La questione dell'indipendenza, per parte sua, per quanto appaia marginale in una prospettiva giustificazionista, rientra nelle caratteristiche che forniscono un contegno organico a un sistema d'assiomi, come assicurazione che le condizioni che questi enunciano non si sovrappongano; per altro, nelle *Grundlagen der Geometrie*, essa rappresentava anche lo strumento per soppesare l'apporto dei singoli assiomi o dei loro raggruppamenti parziali, oltrepassando in tal modo l'architettura di facciata dei ' primi principî ' [285], benché rimanesse precipuamente impegnata a delineare la fisionomia di un sistema assiomatico come concorso di parti autonome alla costituzione di un tutto che, per il suo carattere conchiuso, si configuri come luogo ' naturale ' del pensiero.

Quanto alla sostanza di questo ' tutto ', essa può essere fornita, piú che dalla completezza sintattica che sembra estranea all'ordine di idee che motiva i lavori assiomatici di questo periodo [286], dalla richiesta di categoricità che la contiene parzialmente [287] ed è piú consona al-

a garantire la teoria ed interviene a questo punto l'eliminazione del significato dal testo, quando cioè si tratta di provare la coerenza della teoria (il cui metodo risolutivo varia da settore a settore: in ambito matematico, come s'è detto, l'aritmetica e la teoria degli insiemi rappresentano i punti d'arresto della possibilità di delegare la non-contraddittorietà di una teoria ad un'altra).

[284] Cfr. D. Hilbert, *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, « Mathematische Annalen », CII (1930).

[285] Cosí venivano vagliati i mezzi necessari e sufficienti all'ottenimento di nodi strategici dell'indagine geometrica (non circoscritta semplicemente all'impianto euclideo) quali i teoremi di Desargues e Pascal.

[286] In essi manca infatti la precisazione formale dell'apparato deduttivo necessaria perché la questione della completezza (sintattica) possa venir affrontata; del resto, come si è già ricordato, questa non è sollevata nelle *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert, mentre nell'articolo *Über den Zahlbegriff* la completezza richiesta è quella semantica. Nelle *Grundlagen* di ' completezza ' (*Vollständigkeit*) si occupa invece un assioma che esige l'inestensibilità degli enti compatibili con le proprietà elencate dagli altri assiomi, volta a stabilire l'identità della geometria analitica con quella qui definita: l'assioma di Archimede e quello di completezza assicurano infatti una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali. La categoricità del sistema sussiste di fatto ma non è richiesta in modo esplicito, l'inestensibilità essendo relativa al problema esaminato (caratterizzazione di un corpo archimedeo non suscettibile di ampliamenti) ed insufficiente, in generale, a garantire la categoricità.

[287] Cfr. la successiva nota 291.

l'intento di caratterizzare 'in astratto' un dominio d'entità. Storicamente la sua ricognizione può esser fatta risalire a Dedekind[288], ma perché venga posta in modo esplicito occorrerà attendere l'inizio del secolo: nel 1902 Huntington[289] chiama 'completo' un sistema di postulati che risponda ai requisiti di coerenza, indipendenza e sufficienza, dove l'ultima condizione significa che esiste 'essenzialmente' un solo insieme dotato di operazione che soddisfi gli assiomi. Questa sorta di unicità viene precisata poco dopo nella richiesta di 'equivalenza' (corrispondenza biunivoca che conservi l'operazione) tra ogni coppia di aggregati in cui siano verificati gli assiomi; la categoricità del sistema viene quindi provata. La restrizione ad una singola operazione (binaria) è contingente all'argomento in esame: in uno scritto successivo[290] Huntington proporrà un'assiomatizzazione completa per i reali in cui sono coinvolte due operazioni e una relazione d'ordine. Nel 1904 Veblen propone il termine 'categorico' nel suo attuale significato ed in contrapposizione a 'disgiuntivo', come viene chiamato un sistema di postulati « a cui è possibile aggiungere assiomi indipendenti (e che pertanto lascia aperte piú possibilità) »[291]: un sistema d'assiomi è dunque categorico se basta, piú che alla 'definizione', alla « completa *determinazione* di una classe d'oggetti o elementi ».

L'obiettivo è ancora conforme all'atteggiamento che abbiamo chiamato 'descrittivo', ossia alla funzione primaria a cui inizialmente venne destinata l'assiomatica e che coincise per lungo tempo con la discussione sui fondamenti. Considerando un sistema d'assiomi come codificazione di un'intuizione, in effetti, l'esigenza di categoricità è legittima, rappre-

[288] In effetti in *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1887), i naturali venivano definiti da una struttura d'ordine determinata a meno d'isomorfismi.

[289] E. W. Huntington, *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude*, « Transactions of the American Mathematical Society », III (1902).

[290] Huntington, *Complete sets of postulates for the theory of real quantities*, ivi, IV (1903).

[291] O. Veblen, *A system of axioms for geometry*, ivi, V (1904), p. 346.

In ciò la categoricità si connette all'indipendenza e, riassumendone un'esigenza, si apparenta alla completezza sintattica: la richiesta di deducibilità o refutabilità che quest'ultima contempla rappresenta tuttavia una condizione aggiuntiva che la trasporta, come già detto, ad un diverso stadio di precisione dello strumento deduttivo.

È da notare che anche Veblen richiede espressamente la deducibilità dagli assiomi di ogni proposizione della geometria euclidea come prerequisito di ogni sua assiomatizzazione (cfr. p. 343, *ibid.*).

sentandone in certo modo la misura della resa: gli oggetti della matematica vengono individuati dall'assommarsi di ' ipotesi ' che ne ritaglino con precisione le condizioni di sussistenza al pensiero. In questa discesa per generi e differenze il punto d'arresto nelle specificazioni è determinabile rigorosamente: il sistema di proprietà date intensionalmente si approssima ad un ' concreto ' quante piú ne verranno aggiunte, e vi collima, assumendo uno spessore oggettivo, quando non saranno piú rilevabili differenze all'interno del campo dei ' designati ' possibili: questi, assunti come rispondenti alle esigenze imposte dagli assiomi, cioè come strutture, risulteranno indistinguibili in seno ad un contesto determinato (quello, appunto, perimetrato dalla teoria), il che giustifica la denominazione di ' equivalenza ' per l'isomorfismo che compare in questo periodo.

Un sistema categorico si configura in tal modo come il principio d'individuazione di uno ' stato di cose ', il contorno chiuso sovrapponibile ad ogni sua sfaccettatura e coestensivo (in apparenza, per lo meno) con quanto è razionalmente comunicabile al loro proposito se accompagnato dalla condizione di completezza (contenutistica), implicita nella scelta degli assiomi ed intesa informalmente come controprova empirica delle capacità ricostruttive della teoria ' formale ' nei confronti di un dominio di conoscenze, nel senso che i risultati noti di quest'ultimo debbono essere riottenibili a partire dagli assiomi: allo stadio di precisione richiesto, il sistema circoscrive cosí una situazione intuitiva nel suo darsi come materia del pensiero esatto; i suoi ' contenuti ' appaiono completamente dominabili in quanto determinati univocamente dall'interazione delle richieste che gli assiomi esprimono, mentre il ricupero della loro dimensione ' concreta ' non è a questo punto che un esercizio della memoria.

Quanto ai sistemi ' disgiuntivi ', essi non possono evidentemente venir considerati alla stregua di caratterizzazioni di un dominio d'oggetti, perché come tali risulterebbero incompiute; nondimeno compaiono, in qualità di delimitazioni teoriche, accanto a quelli categorici nel lavoro di assiomatizzazione sottoposto a coltura intensiva dalla scuola americana nel primo decennio del secolo [292]. Cosí Moore [293] pone a con-

[292] Cfr. « Transactions of the Am. Math. Soc. », 1902-1903: oltre agli argomenti che abbiamo citato si danno assiomatizzazioni dei numeri interi relativi, di quelli razionali, dell'algebra della logica, dell'algebra lineare associativa, dei gruppi, dei gruppi abeliani, dei semi-gruppi e dei campi.

[293] E. H. Moore, *A definition of abstract groups*, ivi, III (1902).

fronto differenti definizioni dei gruppi astratti, chiedendosi a quali canoni di convenienza esse debbano soddisfare: oltre all'ovvia richiesta d'indipendenza suggerisce (senza per altro risolversi a favore dell'uno o dell'altro) alcuni criteri di discriminazione a cui riferirsi in presenza di sistemi di postulati equivalenti: una problematica affatto trascurabile, ci sembra, se ciò che effettivamente conta di una ' definizione ' sono le conseguenze che da essa si possono trarre, dal momento che — come inquadrature tematiche — l'uno o l'altro dei rappresentanti di una classe d'equivalenza svolgeranno gli stessi offici, mentre è dalla delimitazione dei confini della classe che dipenderà la portata della teoria. Il momento decisionale nell'approntamento della definizione di una struttura astratta consiste dunque nell'individuazione che tramite essa si compie di una sfera teorica, e ciò appare particolarmente tangibile proprio nel caso dei gruppi: non potendo venir addotta la condizione di categoricità nello stimare ' soddisfacente ' una loro definizione, occorrerà rivolgersi ad altri criteri di valutazione; si tratta in questo caso di isolare un meccanismo operatorio desunto in azione su territori particolari, di elevarlo ad oggetto di considerazione autonoma riducendolo ad una forma. Ma il discernimento delle sue proprietà costitutive avviene solo gradualmente: come osserva Miller [294], inizialmente veniva richiesta la semplice componibilità di un insieme di operazioni (gli elementi del gruppo), mentre le condizioni che verranno aggiunte in seguito (come l'associatività della legge di composizione) passavano inosservate in quanto soddisfatte automaticamente dalla natura delle operazioni in esame. Per quanto le proprietà in gioco non apparissero che frammentariamente, lo sviluppo della ricerca non ne veniva impedito, ed è appunto di essa, come ambito concettuale, che deve tener conto una definizione ' generale ' nel delineare il suo argomento: incorporandovi, cioè, le esigenze della teoria, benché questa (come teoria della struttura astratta) non avesse contorni precisi ma solo un assetto indirizzato in tal senso e, in quanto tale, rimanesse in gran parte inesplorata.

Se si può cosí affermare in prima approssimazione che i sistemi ' disgiuntivi ' ottengono la propria identità teorica mediante il riferimento ad una determinata zona d'indagine (che può precedere o esser contemporanea alla loro costituzione esplicita, ma che — determinando la scelta dei fatti — ne fornisce le ragioni di interesse), resta da chiarire

[294] G. A. Miller, *What is group theory?*, « Popular Science Monthly », LXIV (1904), p. 371.

di che cosa siano la definizione. Dal momento che da una designazione univoca distano di molte condizioni, costituiranno universali o essenze: abbracciando piú ordini di cose attraverso la cernita di loro ' proprietà comuni ' che stabiliscono il raggio d'osservazione della teoria, essi rappresentano dunque definizioni di specie, circostanza che non muta con la dichiarazione di cardinalità che Moore inserisce tra gli assiomi gruppali [295]. Ordinariamente, anzi, questa non è richiesta, l'insieme contemplato in una definizione di struttura essendo assunto in senso puramente astratto, in cui non svolge parte alcuna non solo la ' natura ' dei suoi elementi ma, entro certi limiti, neppure la sua spoglia architettura insiemistica; saranno gli assiomi a rivelarne eventualmente i dettagli, o piuttosto le possibilità d'attualizzazione, perché esso — come sappiamo — non viene circostanziato come realtà ' individuale ' e rimane pertanto un'entità fittizia funzionante da supporto immaginabile per ipostatizzare le proprietà che gli si attribuiscono; quanto a queste, vertono generalmente su una legge di composizione o una relazione di cui non importa la realizzazione effettiva perché se ne considerano le sole caratteristiche formali.

Il fatto che si lasci cadere intenzionalmente l'univalenza di un sistema come suo requisito desiderabile non deriva dalla differenza d'uso del dispositivo assiomatico, strumento descrittivo nel caso dei sistemi categorici (che motivavano la richiesta concernendo un complesso di conoscenze ormai collaudato e restavano vincolati ad una prospettiva fondazionale — in senso largo — a scapito del loro usufrutto teorico), euristico in quello dei sistemi ' disgiuntivi ' (dove si manifesta in misura sostanziale l'incidenza della stipulazione assiomatica sul sapere che la teoria non deve semplicemente riordinare ma elaborare), né è imputabile ai tempi d'acquisizione delle tematiche su cui esso si esercita, bensí al modo in cui esse vengono poste; d'altro canto un taglio d'indagine improntato alla generalità si è rivelato praticabile perché il metodo assiomatico, anche quando impegnato nella dilucidazione di ' concreti ' ha insegnato a riconoscerlo (basti pensare al ruolo dei modelli nelle prove d'indipendenza): sicché, per quanto non ne vengano rispettati gli intenti, è da questo tipo d'apprendistato che proviene la possibilità di un trattamento ' astratto '. I ' contenuti ', poi, a cui quest'ultimo si rivolge non consistono nella pluralità d'interpretazioni di cui è suscettibile: è la teoria degli insiemi, come s'è visto, a fornirgli un sostrato virtuale

[295] Moore, *loc. cit.*

(specificato, come nel caso di un sistema categorico, soltanto dalle sollecitazioni a cui gli assiomi lo sottopongono) e se un'aspirazione alla generalità è presente al momento del suo allestimento, nell'individuazione di una configurazione soggiacente a diverse situazioni particolari, il percorso teorico che a partire da questa si costruisce deve venire legittimato da altre valutazioni d'interesse. L'estrapolazione di uno schema analogico, insomma, ha un senso matematico ben definito perché si è appreso a maneggiare modelli, ad interpretare una teoria in un'altra, ma tutto ciò non rappresenta fin qui altro che la possibilità di un procedimento e non basta a conferire autorevolezza ad un agglomerato di proprietà in quanto argomento d'esame dotato di una dignità tematica propria. Questa deve venir guadagnata altrimenti e inizialmente (prima, cioè, che la teoria — suscitando questioni inedite — faccia emergere nuovi ' contenuti ') ciò avviene circoscrivendo un nucleo problematico riconosciuto come tale, il cui isolamento in astratto ne costituisce la ricezione adeguata: separando un'occorrenza tematica dagli elementi estrinseci che ne hanno accompagnato il riconoscimento, se ne allarga la sfera d'intervento, spesso trasformandone profondamente la fisionomia con un incremento, soprattutto qualitativo, del suo livello di comprensione. Questo tipo d'impatto sul sapere anteriore (che costituisce l'appropriazione di un ambito d'indagine, piú che la soluzione di un problema determinato) misura la pregnanza del costrutto selezionato ed esso soltanto può portare un'analogia formale alla statura del concetto.

Cosí, nella memoria che Steinitz dedica nel 1910 alla nozione di corpo commutativo (o ' campo ')[296], alla quale è stato datato l'esordio ufficiale dell'algebra astratta[297], la postulazione di un sistema di entità ipotetiche rappresenta il momento di unificazione di diversi contesti di ricerca in cui sono apparsi oggetti formalmente affini, radunati ora sotto un singolo schema che ne stabilisce l'identità di specie. Il ricupero delle sue realizzazioni particolari avviene internamente al concetto, con l'ispezione dei suoi caratteri intrinseci: in tal modo la nozione di ' campo

[296] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, « Journal de Crelle », CXXXVII (1910); nuova edizione a cura di H. Hasse e R. Baer, Berlino - Lipsia, de Gruyter, 1930.

[297] Per N. Bourbaki (*Elementi di storia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1963, p. 104) la memoria di Steinitz « si può considerare il punto di partenza dell'attuale concezione dell'algebra ». Dello stesso avviso è L. Lombardo-Radice, secondo cui essa rappresenta « la data di nascita dell'algebra astratta » (*Elementi di algebra astratta*, Milano, Feltrinelli, 1965, p. 313).

primo ' non è individuata dalle situazioni concrete che essa determina a meno di isomorfismi (ossia il campo dei razionali o quello delle classi di resto modulo un numero primo), ma dalla posizione di semplicità che riveste in seno alla teoria. La condizione che la definisce è infatti quella di non contenere sottocampi propri e, dal momento che ogni campo contiene uno ed un solo campo primo, ciò consente di classificarli in base alla situazione elementare (la piú ' povera ' ammessa dagli assiomi della struttura) che coinvolgono [298]: la rilevanza di un tale criterio di distinzione è fornita dal fatto che i rapporti d'inclusione tra dominî con conservazione della struttura (quella di campo o la parallela di ' dominio d'integrità ') costituiscono il motivo fondamentale dell'indagine: i campi primi funzionano allora come elementi di base di ampliamenti che trasformano una data struttura in una piú complessa attraverso l'introduzione di ' irrazionalità '.

Si tratta dunque di una modalità della ' generalizzazione ', quella indotta da ' impossibilità operatorie ' che abbiamo avuto modo d'incontrare sotto forma di ' paradigma ': sottratta all'indeterminazione del mondo delle idee (che poteva solo constatarne l'intervento senza risolverne il meccanismo), viene qui tradotta in un discorso matematico sulle possibilità inscritte in una specie di struttura [299]. Tra queste possibilità, la ' chiusura algebrica ' (estensione ' massimale ' analoga al ruolo svolto in ambito numerico dal campo complesso), di cui Steinitz mostra suscettibile un campo generico « essenzialmente in un unico modo » [300], indica

298 Ossia al ' tipo ' (classe d'equivalenza per isomorfismo) di campo primo che contengono come sottostruttura: ciò determina la loro ' caratteristica '.

299 La teoria di Steinitz può farsi carico di un altro paradigma, il ' principio di permanenza delle proprietà formali ' teorizzato da Hankel, benché questo facesse fronte ad esigenze di tipo diverso da quelle che ispirano le epistemologie della generalizzazione precedentemente esaminate. Secondo Bourbaki (*loc. cit.*, p. 34) esso rappresentava il tentativo non riuscito « di chiarire le idee generali di corpo e di estensione » e la misura tangibile della difficoltà d'acquisizione di una prospettiva strutturale che avesse senso preciso. La portata del principio si può in effetti leggere ' in negativo' negli ostacoli ' oggettivi ' che una situazione culturale oppone alla formulazione stessa di un problema, nella mancanza, cioè, dei presupposti teorici che avrebbero potuto permettere la cognizione di quanto resta invece una semplice esigenza chiarificatrice.

300 Per ottenere questo risultato Steinitz è obbligato all'assunzione dell'assioma della scelta. L'atteggiamento che professa in proposito è agnostico: « ci sono questioni della matematica che non possono venir risolte senza questo principio », scrive a commento della sua necessità nel corso della dimostrazione d'esistenza di un ampliamento algebricamente chiuso per un campo qualsiasi; « d'altra parte — aggiunge — appare opportuno, a salvaguardia della purezza del metodo, di fare

un'altra direzione lungo cui la ' generalizzazione ' si esercita: la riformulazione, cioè, di temi classici e la loro dislocazione in astratto (in questo caso, una versione generalizzata del ' teorema fondamentale dell'algebra '), che ha come conseguenza anche uno spostamento degli interessi: in questo modo « la teoria delle equazioni algebriche diviene un capitolo della teoria degli ampliamenti algebrici, con il contemporaneo abbandono del punto di vista costruttivo e calcolistico » [301]. La classificazione a cui sono sottoposte le differenti estensioni dei campi si differenzia inoltre da una mera tassonomia perché rivolta in primo luogo ad esaminare le funzioni che esse sono in grado di assolvere, riassunte nel teorema di struttura secondo cui ogni campo può essere considerato l'ampliamento algebrico di un ampliamento trascendente puro del suo sottocampo primo, un risultato che ripercorre, nell'orizzonte della massima generalità, un procedimento ' ascensionale ' svolto da Kronecker sul concreto (cioè su campi ed estensioni particolari) e improntato a tutt'altro orientamento epistemologico [302]. Infine la teoria di Galois, benché intimamente connessa all'idea di campo, si presenta inadeguata a riceverne la dimensione astratta (essendo riferita ai soli campi numerici allo stato d'elaborazione in cui Steinitz la trova disponibile): tuttavia, esigendone un aggiornamento rispetto ai nuovi compiti che le si presentano, l'impostazione di Steinitz ne indica la via di sviluppo che verrà di lí a poco perseguita, il gruppo di Galois divenendo un gruppo di automorfismi di un

a meno del principio suddetto se la natura della questione in causa non ne richiede l'impiego » (Steinitz, *op. cit.*, ediz. 1930, p. 8).

301 G. Israel e L. Lombardo-Radice, *Alcune recenti linee di tendenza della matematica contemporanea*, in *Storia della Scienza*, a cura di M. Daumas, Bari, Laterza, 1976, vol. II (*Le scienze matematiche e l'astronomia*), p. 190. È l'impostazione astratta che consente questo mutamento prospettico: l'isomorfismo permette infatti « l'identificazione tra l'ampliamento algebrico di un campo ottenuto costruttivamente attraverso l'aggiunzione della radice di un polinomio e l'ampliamento ottenuto ' simbolicamente ' (non presupponendo cioè note le radici) » (*ibid.*).

302 Cfr. Steinitz, *op. cit.*, ediz. 1930, pp. 8-9, dove viene evidenziato il cambiamento del punto di vista sul particolare ed il generale.

Sull'aritmetismo di Kronecker si veda E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1964, cap. IX; sul contesto delle ricerche da cui scaturisce: N. Bourbaki, *Elementi di storia della matematica*, cit., cap. V, pp. 102-103.

Anche il metodo delle congruenze modulo un polinomio irriducibile su un campo dato (che costituisce uno dei presupposti matematici del programma di Kronecker), trasferito nella teoria di Steinitz rappresenta un esempio ulteriore di appropriazione di una ' tecnica ' e trasformazione dei suoi modi d'utilizzazione. Cfr. Steinitz, *op. cit.*, p. 6.

campo anziché quello delle permutazioni delle radici di un'equazione, secondo una strategia già adottata da Dedekind nel caso dei numeri algebrici. Quest'opera di riedificazione, che verrà portata a termine da Emil Artin nei decenni successivi, contrassegna un'altra trasformazione di una regione teorica che schiuderà a sua volta nuovi indirizzi di ricerca [303].

Se sono i mutamenti di questa natura che, descrivendo la fenomenologia delle nozioni, scandiscono l'andamento della scienza, ne modificano le regioni di interesse o ne rivelano di nuove, poiché è la matematica che deve giudicarne l'opportunità e il valore, rapportandosi — nell'approntamento di una nuova prospettiva — al tessuto di conoscenze che eredita come ad un dato da rielaborare, ad essa spetterà di accudire al proprio sapere, facendosi cosí carico di ciò che non sapremmo indicare se non come la sua filosofia. Ciò è particolarmente evidente nel caso degli edifici della generalità di cui ci occuperemo nel corso dei prossimi capitoli: come interpretare altrimenti l'allestimento di teorie che, in fase progettuale ed in quella della loro instaurazione effettiva, ponendo mano ad una riorganizzazione del sapere matematico (o quanto

303 G. Israel e L. Lombardo-Radice scrivono in proposito: « Nell'ambito della teoria di Galois, Artin enuclea tre aspetti strutturali: sottolinea in modo definitivo come la struttura di un ampliamento algebrico finito sia determinata dai suoi automorfismi; fornisce una dimostrazione del teorema fondamentale non basata sul teorema dell'elemento primitivo; e mette in luce la natura ' lineare ' della teoria di Galois, la quale si trasforma in una teoria che ha lo scopo di analizzare il legame fra la struttura di un campo e quella del corrispondente gruppo di Galois » (*Alcune recenti linee di tendenza* ..., cit., p. 191).

Quanto allo scarto con l'assetto precedente della teoria, « Artin la ' libera ' dalle ' scorie ' derivanti dalla specificità dei problemi che l'hanno suggerita. Come ha osservato Kiernan, " attraverso l'opera di Artin, vennero recise tutte le connessioni della teoria di Galois con il passato. Non si vedeva piú alcun collegamento necessario fra di essa e il problema di risolvere equazioni algebriche. La teoria di Galois era divenuta una teoria sulla struttura dei campi e dei loro automorfismi " » (M. Girardi e G. Israel, *Teoria dei campi*, Milano, Feltrinelli, 1976, *Nota storica*, p. 398).

Nel contempo « la svolta impressa da Artin (...) inaugura un nuovo filone di ricerca che si muove attorno all'obiettivo di applicare il metodo della corrispondenza di Galois in situazioni via via piú generali » (Israel e Lombardo-Radice, *loc. cit.*), le quali oltrepassano il vincolo agli ampliamenti finiti. In effetti, a due decenni di distanza dalla prima edizione del lavoro di Steinitz, i curatori di quella a cui ci siamo riferiti annotavano come la caratterizzazione data da Steinitz della teoria di Galois non fosse piú corrispondente alla realtà, citando anche gli ampliamenti algebrici infiniti a cui era stata mostrata applicabile. Baer e Hasse, in appendice alla teoria di Steinitz, allegano inoltre un ' abbozzo della teoria di Galois ' « basato sulle idee di Steinitz e Dedekind » (Steinitz, *op. cit.*, p. 133).

meno di suoi vasti territori), costituiscono di fatto una presa di posizione in merito alla sua r e a l t à , nel senso che questo termine può avere al di là di un'ottica giustificazionista?

Con il consolidarsi dell'algebra astratta come modello di trattazione, il linguaggio strutturale determina una nuova cadenza del discorso matematico: se il concetto generale di struttura (algebrica) è con ciò accessibile, la sua esplicitazione formale non appartiene tuttavia a questo contesto d'indagine e non perché richieda un ulteriore processo di decantazione, bensí, piú semplicemente, perché esula dai suoi interessi. Le strutture algebriche corrispondono infatti, ciascuna nella propria individualità, a tematiche ben determinate, mentre in quel periodo non si sarebbe saputo cosa attendersi da un'eventuale teoria generale della struttura, la sola circostanza di uno schema sotteso ad una moltitudine di situazioni particolari non potendo fornire al riguardo una motivazione sufficiente. Ciò che conferisce importanza a una nozione è in effetti la sua incidenza sul sapere, la sua presa in consegna da parte di una dottrina che la faccia funzionare matematicamente, il che può avvenire anche nel senso della generalità purché ciò sia conforme al disegno che una teoria intende attuare. Sono appunto configurazioni di questo genere quelle contemplate dalle teorie che prenderemo in esame: che si tratti di enfatizzare il ruolo di preminenza che una struttura mostra nei confronti delle altre, d'intraprendere un lavoro di riordinamento del sapere sulla base di un unico schema astratto o di affidare quest'ultimo ad un altro piano teorico riformulandolo sotto la sua visuale, esse prospettano ciascuna a suo modo il concetto di struttura destinandolo ad utilizzazioni matematiche distinte e diversificandone con ciò la portata strategica.

Capitolo Secondo

IL RETICOLO COME STRUTTURA PRIVILEGIATA E LINGUAGGIO UNIFICANTE

« The world around us abounds with examples of partly ordered sets »

Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*

1. - On the structure of abstract algebras.

I due scritti di Birkhoff *On the combination of subalgebras* (1933) e *On the structure of abstract algebras* (1935) [1] sono importanti sotto diversi aspetti: innanzitutto è ad essi che può esser fatta risalire l'idea di trattare le strutture algebriche in una prospettiva generale, prescindendo cioè non solo dalla natura degli elementi dell'insieme di sostegno ma anche dalla particolarità delle operazioni che vi sono definite (e qui si può datare la nascita della cosiddetta algebra universale) [2]; in secondo luogo il linguaggio adottato nell'indagine è costituito dalla teoria dei

[1] « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society », XXIX e XXXI.

[2] In realtà A. N. Whitehead aveva pubblicato nel 1898 *A Treatise of Universal Algebra*, come abbozzo di una teoria generale che « percorrendo i vari sistemi di ragionamento simbolico connessi all'algebra ordinaria », ne configurasse « uno studio comparativo » in grado di gettare luce « sulla teoria generale del ragionamento simbolico, ed in particolare sul simbolismo algebrico ». Allora « Algebra Universale sarà il nome applicato a quel c a l c o l o che simbolizza operazioni generali, che vengono chiamate a d d i z i o n e e m o l t i p l i c a z i o n e. Esistono alcune definizioni generali che valgono in ogni processo di addizione ed altre che valgono in ogni processo di moltiplicazione. Q u e s t i s o n o i p r i n c i p î g e n e r a l i d i o g n i r a m o d e l l ' A l g e b r a U n i v e r s a l e » (p. 18, spaziature nostre).
La preoccupazione di Whitehead sembra dunque vertere più sull'aspetto algoritmico che non sulla caratterizzazione di oggetti mediante assiomi, il che apparenta

reticoli, che sembra presentarsi in modo naturale come mezzo d'attacco per problemi di questo genere: con questo si inaugura il filone di ricerche che, nel decennio precedente alla guerra, privilegerà la teoria dei reticoli come linguaggio unificante di vari settori della matematica.

Il primo compito che affronta Birkhoff è quello di formulare una definizione soddisfacente di algebra astratta, il cui referente informale era rappresentato da un insieme su cui sono definite operazioni, com'è il caso di gruppi, anelli, campi, ed in genere il materiale raccolto da Van der Waerden sotto il titolo *Moderne Algebra* [3].

questo testo al secolo a cui appartiene (in un filone di ricerche che si può fare risalire a Boole), piuttosto che a quello che sta per nascere. Per una chiara ricognizione di quelle affinità e di questo scarto, cfr. C. Mangione, *La svolta della logica nell'Ottocento* (Conclusione), in L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Milano, Garzanti, vol. V, 1971.

A prescindere dagli arcaismi dell'impostazione, il lavoro di Whitehead sembra in anticipo sull'assetto della matematica 'astratta' (come verrà configurandosi qualche decennio dopo). Cosí leggiamo a p. 35 che « l'algebra della logica è il solo rappresentante noto di genere non-numerico dell'Algebra Universale ».

Peraltro P. Cohn, in un recente trattato sull'argomento, fa risalire « l'algebra universale come la si intende oggi » all'inizio del secolo, « quando emerse come sviluppo naturale della trattazione astratta dell'algebra iniziata da Emmy Noether »; con ciò Whitehead è lasciato da parte. Qualche anno dopo G. Grätzer, nell'introduzione della sua *Universal Algebra*, dichiara che il punto di vista di Whitehead può essere ancora condiviso. Tuttavia « benché Whitehead avesse individuato le esigenze dell'algebra universale, non ottenne risultati. I primi risultati vennero pubblicati da Birkhoff negli anni Trenta ». E conclude: « Per generalizzare occorre esperienza e prima degli anni Trenta la maggior parte delle branche dell'algebra moderna non erano sviluppate sufficientemente per fornire impeto allo sviluppo delle algebre universali ».

[3] B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, 2 voll., Berlino, Springer, 1930-1931. Per una rassegna delle fonti che hanno storicamente motivato quest'opera, cfr. B. L. Van der Waerden, *On the sources of my book "Moderne Algebra"*, « Historia Mathematica », 2 (1975).

Sul fatto che la caratterizzazione informale del concetto generale di struttura algebrica astratta non presentasse particolari problemi, possiamo addurre ad esempio un articolo 'divulgativo' di C. J. Keyser sul concetto di gruppo (pubblicato nella raccolta *Mathematical Philosophy, a Study of Fate and Freedom*, New York 1922; successivamente in Aa. Vv., *The World of Mathematics*, New York, Simon & Schuster, 1956, vol. III), dove la nozione di 'sistema algebrico' è introdotta nei termini seguenti: « Presentando astrattamente la nozione di gruppo è conveniente far uso del termine s i s t e m a . (...) Impiegato nella definizione di gruppo, esso significa una qualche determinata classe di oggetti con una qualche determinata regola o procedimento rispetto a cui ogni membro della classe può essere combinato con ogni altro membro di essa, incluso se stesso. (...) Esistono tre e soltanto tre aspetti sotto i quali due sistemi possono essere differenti; possedendo classi diffe-

A l g e b r a   a s t r a t t a verrà allora detta una coppia (A, F) dove A rappresenta un insieme di elementi, mentre F è un insieme di operatori $f_1, f_2, f_3, \ldots$ A ciascun operatore è associato un dominio di definizione costituito da un insieme di ' sequenze ' di elementi di A[4]: applicato ad esse, l'operatore risulta una funzione (univoca) a valori in A. Una specificazione di questa definizione si ottiene imponendo la condizione di ' uniformità ' agli operatori appartenenti ad F, il che significa richiedere che il dominio di definizione di ogni operatore sia un determinato prodotto cartesiano di A, cioè che ciascun operatore agisca su tutte le n-ple di elementi di A, per un determinato n eventualmente variante da operatore a operatore. In questo caso l'operatore si dirà n-ario ed n la sua ' arietà '. Le algebre ad operatori uniformi si suddividono naturalmente secondo le arietà dei loro operatori: questo conduce alla nozione di tipo $\mathbf{T}$. Se è un insieme di numeri interi $k_1, k_2, \ldots, k_s$, un'algebra (A, F) si dirà di tipo $\mathbf{T}$ quando i suoi operatori $f_1, \ldots, f_s$ hanno rispettivamente arietà $k_1, \ldots, k_s$[5]. L'ambientazione delle algebre entro tipi, dunque l'apparentamento di algebre attraverso quest'ambito di similarità, rappresenta lo schema minimale che un'algebra realizza e dove diverse algebre possono essere raggruppate e confrontate[6]. La caratterizzazione di Birkhoff delle classi equazionali, che è il risultato più importante di questi lavori, ha luogo entro un tipo determinato.

Un primo risultato è costituito dai rapporti che intercorrono tra due strutture canoniche che si possono associare a un'algebra astratta: il gruppo degli automorfismi e il reticolo delle sottoalgebre[7]. Un auto-

renti, possedendo differenti regole di combinazione, o differendo sotto entrambi questi aspetti » (ediz. 1956, p. 1538).

Come si vede, la situazione informale delle algebre astratte si presenta perfettamente trasparente.

4 ' Sequenza ' significa qui semplicemente i n s i e m e   b e n   o r d i n a t o .

5 Cosí un gruppo $\mathcal{G} = \{G, +, (\ )^{-1}\}$ costituisce un esempio di algebra uniforme di tipo $(2,1)$; un reticolo $\mathfrak{R} = \{R, \cup, \cap\}$ è invece un'algebra di tipo $(2,2)$; un'algebra di Boole $\mathcal{A} = \{A, \cup, \cap, (\ )^c\}$ di tipo $(2,2,1)$.

6 In realtà un'algebra di Boole può esser caratterizzata come un particolare esempio di reticolo mediante un supplemento di assiomi (mantenendo cosí il tipo $(2,2)$) o anche nei soli termini delle operazioni $\cup, (\ )^c$, nel qual caso risulta di tipo $(2,1)$, come i gruppi. Sulla caratterizzabilità di un'algebra entro tipi differenti Birkhoff non si sofferma in questo scritto, e neppure vi accenna.

7 Nella notazione che abbiamo introdotto, s o t t o a l g e b r a di una data algebra (A, F) è una coppia (B, F) dove B è un sottoinsieme di A e, per ogni $f \in F$, se una sequenza s del dominio di definizione di f è costituita di elementi appartenenti a B, allora $f(s)$ risulta anch'essa appartenere a B.

morfismo di un'algebra è una corrispondenza biunivoca dell'insieme sostegno in se stesso che conserva le operazioni [8]. Era un fatto noto che l'insieme degli automorfismi di un'algebra forma un gruppo, mentre ogni gruppo può essere interpretato come gruppo degli automorfismi di un'opportuna algebra [9]. Birkhoff dimostra nel 1933 un risultato simile: ad ogni algebra è possibile associare una struttura derivata, il reticolo delle sue sottoalgebre, ed ogni reticolo può essere interpretato come reticolo delle sottoalgebre di un'opportuna algebra [10]. Fin qui siamo di fronte a due costruzioni canoniche indotte da un'algebra astratta: oggetti associati a un'algebra (automorfismi, sottoalgebre) presentano a loro volta una configurazione algebrica (di specie determinata). Il reticolo è infatti un'algebra, con due operazioni binarie che soddisfano le leggi associa-

[8] Ovvero: si chiama automorfismo una corrispondenza biunivoca α: $A \rightarrow A$ (dove A è il sostegno di un'algebra (A, F) per il quale risulti $\alpha(f(\underline{s})) = f(\alpha(\underline{s}))$ per ogni $f \in F$ ed ogni $\underline{s}$ appartenente al suo dominio di definizione, dove con $\alpha(\underline{s})$ si intende la sequenza ottenuta da $\underline{s}$ applicando ad ogni elemento che la costituisce la corrispondenza α (e conservando l'ordine).

[9] Questo fatto è provato da Birkhoff nell'articolo del 1935.

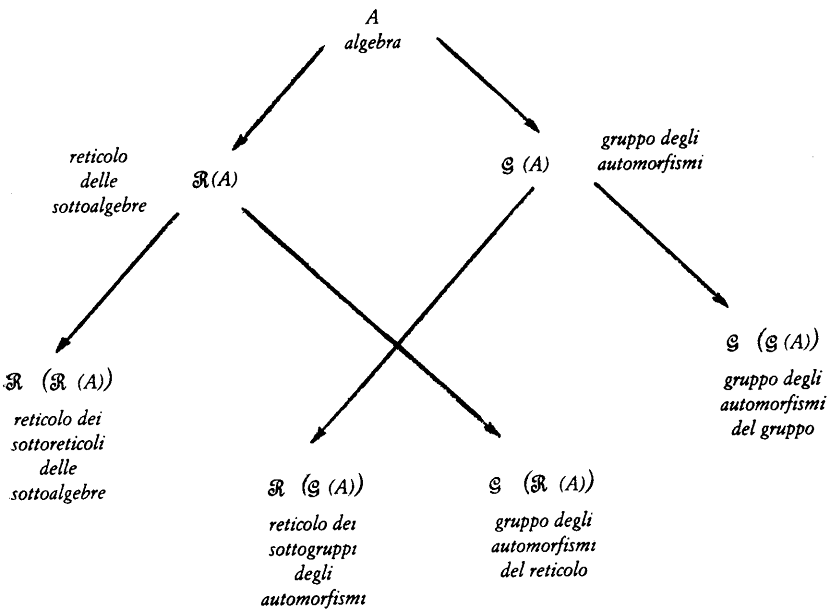
[10] In realtà questo risultato richiede la precisazione seguente: l'insieme delle sottoalgebre di una qualsiasi algebra costituisce un reticolo c o m p l e t o, ed ogni reticolo c o m p l e t o può esser concepito come reticolo delle sottoalgebre di un'opportuna algebra, dove la proprietà di c o m p l e t e z z a di un reticolo sta ad indicare che ogni suo sottoinsieme possiede un minimo maggiorante e un massimo minorante (cfr. la nota successiva).

A vent'anni di distanza Helmuth Gericke (*Über den Begriff der algebraischen Struktur*, « Archiv der Mathematik », IV, 1953) riesamina questo risultato e con esso anche la definizione di Birkhoff di a l g e b r a a s t r a t t a.

Per quanto riguarda il risultato, Gericke osserva preliminarmente che la nozione di reticolo completo non è formalizzabile nel calcolo elementare dei predicati, benché il risultato di Birkhoff si dimostri indipendente da un'ambientazione più ricca: formula così un concetto sostitutivo di reticolo completo, che richiede l'esistenza di confine inferiore e superiore non sull'intero insieme delle parti del reticolo ma soltanto su una determinata famiglia di sottoinsiemi. Per quanto concerne la definizione, la differenza è costituita dall'introduzione di relazioni e di operazioni esterne, oltre a quelle interne che comparivano in Birkhoff, quali costituenti di un'algebra associata a un insieme di sostegno. Le operazioni esterne (dominî di operatori) sembrano in particolare in grado di apportare una certa semplificazione e maneggevolezza: per esempio, un anello A può venire concepito alla stregua di un'algebra con l'addizione come operazione interna, la moltiplicazione a destra e quella a sinistra come operazioni esterne con A stesso (insieme di sostegno) come dominio di operatori. Le sue sottoalgebre individuano allora gli ideali dell'anello. Il prototipo di struttura con operazioni esterne era costituito dai gruppi con operatori (ai quali questo esempio può esser ricondotto come caso particolare), che comparivano per altro già nella *Moderne Algebra* di Van der Waerden.

Ma quello che parla Gericke sembra ormai essere il linguaggio estensionale '*à la* Bourbaki'.

tiva, commutativa e di assorbimento [11]. Poiché le strutture derivate sono anch'esse algebre, è possibile reiterare la filiazione, che possiamo visualizzare nel seguente schema ad albero



Ogni automorfismo nell'algebra capostipite induce un automorfismo nelle strutture derivate. In piú, nel caso dei gruppi di automorfismi costituiti su una qualsiasi struttura della rete, sono conservate le leggi di composizione gruppali lungo la corrispondenza.

[11] In simboli $\forall a, b, c \in \mathfrak{R} = \{R, \cup, \cap\}$

$$a \cap b = b \cap a\,; \quad a \cup b = b \cup a$$
$$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c\,; \quad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$$
$$a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$$

Un reticolo arbitrario $\mathfrak{R}$ induce un ordinamento (parziale) ponendo $a > b$ se e solo se $a \cap b = b$ (o equivalentemente $a \cup b = a$: scambiando le operazioni, dunque, si invertono gli ordini, e viceversa).

È tuttavia possibile introdurre la struttura di reticolo a partire da un ordinamento: se R è un insieme (parzialmente) ordinato e tale che per ogni coppia di suoi elementi a, b esistano altri due elementi d, s che siano rispettivamente massimo minorante e minimo maggiorante della coppia in questione (ovvero $s > a > d$ e $s > b > d$, mentre non esistono $s' \neq s$ e $d' \neq d$ tali che $s > s' > a > d' > d$ oppure $s > s' > b > d' > d$), allora esso costituisce un reticolo per il quale $a \cup b$ rappresenta il minimo maggiorante dei due elementi, $a \cap b$ il massimo minorante.

L'analogia delle costruzioni reticolari e gruppali si precisa assumendo una configurazione duale, nel caso di un'invarianza che collega $\mathfrak{R}(A)$, reticolo delle sottoalgebre di A, e $\mathfrak{R}(\mathcal{G}(A))$, reticolo dei sottogruppi di automorfismi di A. Più precisamente, definendo un automorfismo α di A ' centralizzante ' un sottoinsieme C di A quando risulti $\alpha(c) = c$ per ogni elemento c di C, è possibile istituire una corrispondenza che a una sottoalgebra S di A associa il sottogruppo degli automorfismi che centralizzano S; reciprocamente ad ogni sottogruppo g di automorfismi si può far corrispondere la sottoalgebra di A costituita dagli elementi centralizzati dagli automorfismi di g. Si definiscono in questo modo due applicazioni:

$$\sigma : \mathfrak{R}(A) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathcal{G}(A))$$
$$\tau : \mathfrak{R}(\mathcal{G}(A)) \longrightarrow \mathfrak{R}(A)$$

dove, se $S \in \mathfrak{R}(A)$, $\sigma(S) = \{\alpha \in \mathrm{G}(A) \mid \forall x \in S\ \alpha(x) = x\}$
e se $g \in \mathfrak{R}(\mathcal{G}(\mathrm{A}))$, $\tau(g) = \{a \in A \mid \forall \xi \in g\ \xi(a) = a\}$

Le due applicazioni σ, τ invertono gli ordinamenti da dominio e codominio: ossia, se $S' \supset S''$ risulta $\sigma(S') \subset \sigma(S'')$, mentre $g' \supset g''$ comporta $\tau(g') \subset \tau(g'')$. Il linguaggio categoriale esprime questa situazione in termini generali, i due reticoli essendo categorie aventi l'inclusione come freccia tra gli oggetti. Le due applicazioni σ, τ sono allora funtori (controvarianti) e formano una coppia di aggiunti (in particolare una connessione di Galois, situazione che esprime una sorta di analogia ' speculare ' tra i due dominî collegati).

La stessa configurazione astratta sostiene una situazione differente, descrivendo una perfetta specularità, come dice Birkhoff, tra « costruzioni algebriche e leggi d'inferenza formale », tra semantica e sintassi: anche in questo caso la corrispondenza sussiste tra due reticoli, quello delle algebre ottenibili entro un tipo e quello delle equazioni tra termini dello stesso. Seguiamo piú da vicino la costruzione della corrispondenza: sia $\mathfrak{A}$ un insieme di algebre appartenenti ad uno stesso tipo $\mathbf{T}$; allora è possibile costruire una famiglia di algebre $F(\mathfrak{A})$, costituita da tutte le algebre generate da $\mathfrak{A}$ per mezzo delle sottoalgebre, delle immagini omomorfe e dei prodotti diretti [12]. Le famiglie di algebre cosí ottenute (sem-

[12] Un omomorfismo tra algebre (A, F), (B, F) è un'applicazione univoca ψ: $A \rightarrow B$ tale che $\psi(f(a_1, \ldots, a_n)) = f(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n))$ per ogni $f \in F$ e per ogni $a_i \in A$. L'immagine $\psi(A) \subseteq B$ è detta ' immagine omomorfa ' di A.

Per prodotto diretto di n algebre $(A_1, F), \ldots, (A_n, F)$ si intende pre all'interno di un tipo **T**) formano un reticolo, dove intersezione ed unione hanno la naturale accezione insiemistica. D'altra parte si ottiene un reticolo anche considerando le equazioni fra termini. Occorre premettere qualche definizione. Un termine di (rango zero) è un simbolo primitivo, un termine di rango n è una formula del tipo $f(t_1, \ldots, t_k)$, dove f è un operatore k-ario, $t_1, \ldots, t_k$ sono termini di rango $< n$ e $n-1$ è il rango massimo che qualche t_i presenta. In pratica i termini sono tutte le espressioni ottenibili mediante le applicazioni (consentite) degli operatori agli elementi: il rango misura la complessità dell'espressione. Dove risulti $n > 1$ si può parlare di queste espressioni come di operazioni derivate. Il tutto, ricordiamo, si svolge all'interno di un tipo determinato [12]. Ovviamente, sostituendo in un termine elementi dell'insieme-sostegno di un algebra a tutte le occorrenze di simboli primitivi [13], otterremo un elemento dello stesso insieme: si possono sempre trattare i termini alla stregua di operazioni. Allora diremo ' legge ' di un'algebra A ogni equazione fra termini $t' = t''$ tale che per ogni sostituzione delle variabili con elementi di A i due termini t' e t'' individuino sempre un elemento uguale. Gli assiomi della teoria dei reticoli che abbiamo dato in nota sono cosí ' leggi ' per ogni reticolo $\mathfrak{R}$. Si passa in modo naturale a definire una legge per un insieme di algebre $\mathfrak{A}$ (appartenenti a una stessa specie) come un'equazione tra termini che sia una legge per ognuna delle algebre appartenenti a $\mathfrak{A}$.

Una legge vera per un insieme di algebre $\mathfrak{A}$ risulta vera anche in $F(\mathfrak{A})$, cioè nella famiglia di algebre ottenute mediante le costruzioni precedentemente descritte. Data un'algebra (A,F), [*] se $t_1 = t'_1, t_2 = t'_2, \ldots, t_k = t'_k$ sono leggi di A e se $f \in F$ è un operatore k-ario allora $f(t_1, \ldots, t_k) = f(t'_1, \ldots, t'_k)$ è una legge di A; inoltre [**] se $t' = t''$ è una legge di A in cui occorra il simbolo primitivo x, ogni sostituzione di x (in tutte le sue occorrenze) con un qualsiasi elemento $a \in A$ fornisce ancora una legge di A. Possiamo allora, in presenza di un insieme E di equazioni fra termini, ottenere una famiglia $\Phi(E)$

invece l'algebra $A = A_1 \times \ldots, \times A_n$ i cui elementi sono costituiti da n-ple $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dove a_i è un qualsiasi elemento di A_i e le cui operazioni sono definite a partire da quelle appartenenti a F, ponendo $f(\underline{s}) = (f(\underline{s}_1), \ldots, f(\underline{s}_n))$, dove $\underline{s}_i$ è una k-pla di elementi di A_i (quando f sia k-aria), mentre $\underline{s}$ rappresenta l'n-pla di k-ple $(\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n)$.

[13] Cosí in un gruppo (ambientato nel tipo (2,1)) le espressioni a, $(a)^{-1}$, $a + (a)^{-1}$ rappresentano termini di grado $0, 1, 2$ rispettivamente, sul simbolo primitivo a.

applicando i procedimenti [*], [**] alle formule di E. Le famiglie di equazioni tra termini entro un tipo $\mathbf{T}$ costituiscono allora un reticolo [14].

Si può istituire a questo punto la corrispondenza: ad ogni insieme E di equazioni tra termini di tipo $\mathbf{T}$ è possibile associare una famiglia di algebre $F(E)$ tale che $\Phi(E)$ è l'insieme delle leggi di $F(E)$.

Se indichiamo con $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ e $\mathfrak{R}'(\mathbf{T})$ rispettivamente il reticolo delle famiglie di algebre di tipo $\mathbf{T}$ e il reticolo delle famiglie di equazioni tra termini della stessa specie, possiamo enunciare il risultato fondamentale: le due corrispondenze

$$\Phi : \mathfrak{R}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathfrak{R}'(\mathbf{T})$$
$$\bar{F} : \mathfrak{R}'(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathbf{T})$$

che associano rispettivamente ad ogni famiglia $F(E)$ di algebre di tipo T la famiglia $\Phi(E)$ di equazioni che sono leggi di $F(E)$ e ad ogni famiglia di equazioni $\Phi(K)$ la famiglia di algebre $F(K)$ per le quali le equazioni di $\Phi(K)$ sono leggi, costituiscono una connessione di Galois e in piú risulta $\forall F(E) \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ $\forall \Phi(E) \in \mathfrak{R}'(\mathbf{T})$ $\bar{F}(\bar{\Phi}(F(E))) = F(E)$, $\bar{\Phi}(\bar{F}(\Phi(E))) = \Phi(E)$.

Ciò significa che la famiglia di algebre, rispetto alle quali la famiglia di equazioni associate ad $F(E)$ tramite $\bar{\Phi}$ sono leggi, è costituita esattamente dalla famiglia $F(E)$ di partenza, e viceversa che la famiglia di equazioni che sono leggi per le algebre associate da $\bar{F}$ a $\Phi(E)$ è esattamente la famiglia $\Phi(E)$. In termini categoriali i funtori (controvarianti) $\bar{F}$ e $\bar{\Phi}$, che formano ancora una coppia di aggiunti, sono tali che $\bar{F} \cdot \bar{\Phi} = id_{\mathfrak{R}(\mathbf{T})}$ e $\bar{\Phi} \cdot \bar{F} = id_{\mathfrak{R}'(\mathbf{T})}$. Con ciò si ottiene un isomorfismo tra le categorie $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ e $\mathfrak{R}'(\mathbf{T})^{op}$: Birkhoff può allora concludere che tra i due reticoli sussiste un isomorfismo duale, il che rappresenta, rispetto al caso precedente [15], un apparentamento più stretto, un rispecchiamento completo. Ciò si esprime in maggior misura se guardiamo non solo alla situazione formale che il teorema stabilisce, ma anche al suo significato.

Come in geometria algebrica una famiglia di polinomi individua la regione dello spazio che li annulla simultaneamente (il luogo dei loro zeri), e un insieme di punti determina l'insieme dei polinomi che si an-

[14] Anche in questo caso unione e intersezione (tra due famiglie di equazioni) hanno l'ordinaria accezione insiemistica.

[15] In effetti nel caso precedente si otteneva soltanto $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}(S)) \supset S$ e $\mathfrak{G}(\mathfrak{R}(g)) \supset g$ (S sottoalgebra, g sottogruppo).

nullano su ciascuno di questi punti, qui la corrispondenza associa equazioni ad algebre che le verificano, ed algebre alle loro verità (equazionali), all'interno di un quadro che regola ad un tempo la generazione delle algebre e quella delle equazioni, indicando le forme complesse di entrambe ottenibili a partire da quelle semplici, in modo che il materiale sintattico si mostra una caratterizzazione adeguata della classe delle algebre corrispondenti, mentre all'inverso le costruzioni algebriche descritte ' producono ' oggetti che si prestano a una tale caratterizzazione. Una famiglia di algebre che sappiamo chiusa rispetto a quelle costruzioni (effettuando le quali, cioè, non si esce dalla famiglia di partenza) sarà passibile di una caratterizzazione di cui ci è garantita la possibilità e la forma generale: un'assiomatizzazione mediante equazioni, il che assicura per esempio la riducibilità di una loro eventuale descrizione piú complessa a una forma semplice. Un'assiomatizzazione di questa sorta, viceversa, garantisce la possibilità di effettuare le costruzioni anzidette avendo ancora a fare con oggetti di eguale natura, senza sconfinare dalla specie di struttura che il sistema d'assiomi descrive. Inoltre, poiché in algebra astratta indebolire o rafforzare un assioma (eventualmente aggiungerlo o eliminarlo) può significare la ' creazione ' di nuovi oggetti che divengono tema dell'indagine, il fatto di mantenersi all'interno di una scrittura equazionale (entro un tipo) informa in anticipo sulla natura (insiemistica) che questi oggetti avranno.

Otteniamo cosí un adeguamento tra livello intensionale e livello estensionale; nella corrispondenza tra i due piani ha avuto un ruolo preminente la definizione di algebra astratta entro un tipo (algebra uniforme): è essa che ha regolato, come s'è visto, tutte le considerazioni successive, ed in certo senso le ha richieste. Un tipo algebrico non è che la prima ambientazione, necessariamente vuota, per una struttura algebrica: non esibisce altro che la ' dimensione ' astratta dove si installeranno successivamente le operazioni, prescrivendone le arietà. Questa caratterizzazione è evidentemente a maglie troppo larghe per poter individuare gli oggetti di cui si occupa l'algebra (come gruppi o anelli): per raggiungere il territorio abitato da questi occorre dar forma alle operazioni, il che richiede il concorso del materiale linguistico, e d'altra parte dar loro corpo, facendo intervenire gli insiemi su cui definirle. Alla confluenza dei due piani si raggiungono gli oggetti ' concreti ', i modelli, cioè, di una determinata specie di struttura.

Ulteriori risultati sono ottenuti da Birkhoff nello stesso articolo. Per esempio, un'altra nozione molto generale in algebra, la relazione di equivalenza, si presta anch'essa a una descrizione reticolare: l'insieme delle relazioni di equivalenza definibili su un insieme forma infatti un reticolo. Se l'insieme in questione è finito, il reticolo corrispondente risulta dualmente isomorfo a un'algebra di Boole di ordine 2^n (la quale è a sua volta isomorfa all'insieme delle parti di un qualsiasi insieme di n elementi su cui vengano definite le operazioni in termini insiemistici). Inoltre, per ogni reticolo di sottogruppi di un gruppo esiste un reticolo di relazioni di equivalenza ad esso isomorfo e viceversa (il gruppo associato essendo costituito dalle permutazioni sulle classi d'equivalenza). Infine, nel caso di un'algebra una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni viene detta 'congruenza'[16]: l'insieme delle congruenze definibili su un'algebra con operazioni finitarie è un sottoreticolo del reticolo delle relazioni d'equivalenza.

Ma è qualcos'altro che attira la nostra attenzione, benché in questo scritto — che possiamo considerare un vero e proprio manifesto della concezione epistemologica che abbiamo descritto, non fosse altro che per la ricchezza dei risultati ottenuti — compaia solo marginalmente ed in quello del 1933 venisse relegato al titolo di 'applicazioni': si tratta di un impiego della teoria dei reticoli dall'accento diverso. Qui è la teoria dei reticoli in quanto teoria astratta ad entrare in gioco, non solo il suo linguaggio che si presta alla descrizione di situazioni generali: qualche esempio può illustrare questo approccio[17]. Se identifichiamo l'operazione di intersezione con la parte comune di due sottogruppi di un dato gruppo e l'unione con il sottogruppo generato da essi, otteniamo che l'insieme dei sottogruppi, quello dei sottogruppi normali e quello dei sottogruppi caratteristici di ogni gruppo costituiscono dei reticoli (negli ultimi due casi dei reticoli di Dedekind o 'reticoli modulari'). Cosí avviene anche nella teoria degli anelli, dove i sottoanelli, gli ideali destri, quelli sinistri e quelli bilateri formano anch'essi un reticolo (negli ultimi tre casi ancora un reticolo modulare). Sicché i risultati della teoria dei reticoli si riversano automaticamente nella teoria dei gruppi o in quella degli anelli, e le strutture astratte funzionano come modelli.

[16] Ovvero se $a \sim b$ esprime l'equivalenza tra i due elementi a, b e se per ogni $f \in F$ (che supponiamo n-aria) $a_1 \sim b_1$, $a_2 \sim b_2$, ..., $a_n \sim b_n$ implica $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$ allora $\sim$ è una congruenza.

[17] Un esemplare più nitido di questo tipo di approccio è in realtà fornito da un articolo di Birkhoff del 1934 (*On the Lattice Theory of Ideals*, « Bulletin of the American Mathematical Society », vol. XL), dove esso assume una forma meno occasionale e piú circostanziata.

I reticoli questa volta ispezionano le strutture all'interno e il loro impiego appare, se vogliamo, piú diretto rispetto alle modalità d'intervento precedentemente descritte. In particolare, i reticoli modulari sembrano in grado di esprimere una serie molto ampia di situazioni chiave appartenenti a dominî diversi: oltre ai casi citati costituiscono un reticolo modulare anche i sottospazi di uno spazio vettoriale, i moduli di un anello, gli insiemi lineari della geometria proiettiva e le estensioni di Galois del dominio razionale (per citare gli esempi addotti da Birkhoff). I risultati ottenuti a questo proposito negli articoli di Birkhoff sono modesti, ma si annuncia una possibilità che costituirà il nucleo del programma di Oystein Ore che descriveremo in seguito.

Prescindendo per il momento dalle differenze [18] che si presentano all'interno dell'applicazione dei reticoli alle algebre astratte, soffermiamoci a valutare quali considerazioni offrono i risultati di Birkhoff.

Si è ottenuta una formalizzazione del concetto intuitivo di ' algebra astratta ' ed una serie di chiarificazioni ristrette alle algebre uniformi (le algebre, cioè, con operazioni finitarie definite ovunque). Il reticolo, algebra tra le algebre, si è prestato in modo naturale a queste considerazioni: una volta ricondotte le algebre ad un esplicito schema di costruzione, il linguaggio dei reticoli si è rivelato in grado di descrivere situazioni generali, di rivelare organizzazioni soggiacenti alle algebre, di esprimere loro comportamenti notevoli. Assumendo questi oggetti astratti e trasferendoli in un'ambientazione comune, si guadagna un piano di realtà su cui i reticoli si mostrano in grado di parlare, gettando luce sulla natura dell'oggetto algebrico in generale. Matura cosí la convinzione che la teoria dei reticoli rappresenti il linguaggio privilegiato per penetrare questo campo d'indagine: in entrambe le accezioni del suo intervento esso si prefigura come strumento di unificazione, capace di accedere ad un'astrazione ' di secondo livello ' che assume come universo del discorso le algebre astratte, senza limitarsi a considerarne le specie storicamente esplicitate ma descrivendo anticipatamente un mondo di costruzioni possibili.

[18] Crediamo di poter rintracciare il proseguimento di questa biforcazione attitudinale per un verso nell'algebra universale, che si costituisce come disciplina autonoma e potenzierà il suo linguaggio conformemente ai suoi scopi adottando lo schema reticolare solo strumentalmente (senza che esso costituisca un centro focale). Il paradigma reticolare sarebbe cosí caratteristico del secondo ramo, culminante nella pubblicazione della *Lattice Theory* di Birkhoff (American Mathematical Society, Colloquium Publications, 1948, 1ª ediz. 1940).

Se i reticoli sembrano cosí conquistare un'altezza adeguata a dominare il territorio dell'algebra, rinvenendo invarianze nascoste dalle particolarità dei singoli dominî, va aggiunto che il loro intervento non si arresta a questo confine (nella terminologia di Birkhoff: alle algebre uniformi), ma presenterà una serie di incursioni in regioni diverse [19], dalla topologia alla meccanica quantistica, su cui torneremo successivamente. Birkhoff presenterà una sintesi di tutti questi risultati, nel suo *Lattice Theory*, nella cui prefazione potrà affermare: « Come la teoria dei gruppi, sua sorella maggiore, la teoria dei reticoli è una fonte proficua di concetti astratti, comuni a branche della matematica tradizionalmente irrelate. Entrambe sono basate su postulati di natura estremamente semplice e generale. Fu questo a convincermi che la teoria dei reticoli era destinata a recitare — a dire il vero implicitamente l'ha sempre recitata — una parte fondamentale in matematica » [20].

Esplicitare, dunque, quanto sedimentato in oggetti o dominî matematici di natura diversa: è questo il paradigma del proporsi della teoria dei reticoli come teoria unificante, paradigma che assume un'accentuazione ancora maggiore nei lavori di Ore. Ma se la pretesa è questa, allora ha senso parlare di ' fondamenti ': ed in effetti è quanto fa Ore, a cominciare dal titolo di due suoi articoli del 1935-36. Tralasciando l'indizio offerto dalla presenza di una parola la cui semantica non è certo univoca, possiamo cercare di caratterizzarne l'atteggiamento di fondo. Questo è, come nel caso di Birkhoff, la candidatura della teoria dei reti-

[19] La stessa definizione di Birkffoff di ' algebra astratta ' aveva tenuto prudentemente aperta questa possibilità, essendo molto piú vasta del territorio algebrico in senso stretto (consentendo in effetti operazioni infinitarie e non ovunque definite sull'insieme di sostegno).

[20] *Lattice Theory*, « Preface to the second edition » (1948), spaziatura nostra. Dieci anni prima (*Lattices and their applications*, « Bulletin of the Am. Math. Soc. », XLIV) Birkhoff le riservava uno statuto pressoché analogo, e una parentela identica (« It is my privilege ot introduce to this Society a vigorous and promising younger brother of group theory, by name, lattice theory »). Non ci si spiega peraltro la loro differenza di sesso, le teorie essendo notoriamente di genere neutro in lingua inglese. La teoria dei gruppi, proseguiva Birkhoff, costituisce il linguaggio idoneo alla trattazione di fenomeni di simmetria mentre la teoria dei reticoli ha presa piuttosto sulle situazioni d'ordine, specialmente su quelle che si configurano in qualche modo come gerarchie. Ma questi non paiono essere argomenti decisivi. A sciogliere l'enigma è forse un'osservazione incidentale di Raymond Queneau, secondo cui « *reticolo* sa troppo di caserma » (evocazione non proprio femminile, dunque).

coli (per i quali Ore preferisce la denominazione di *structures*)[21] a edificio generale, unificante nel caso specifico l'algebra astratta. Attraverso i reticoli si è in grado di ottenere una lettura in profondità dei fatti algebrici, di ispezionare un *corpus* di risultati ottenuti in riferimento a dominî particolari, individuandone invarianze matematicamente significative. Il linguaggio reticolare interviene dunque a titolo chiarificatore su oggetti preesistenti e nello stesso tempo, ambientandoli in astratto, ne estende il dominio: perché, come in algebra, è attraverso condizioni a cui questi oggetti sono chiamati a rispondere che si assicureranno risultati comunque validi. Sennonché nel caso di Ore questo procedimento che ripercorre quello dell'algebra astratta fa intervenire le strutture astratte come universo dei concreti e proprietà dei reticoli come condizioni. Quanto avevamo rinvenuto a margine degli articoli di Birkhoff costituisce qui un percorso esplicito: le algebre astratte fungono da modelli e i reticoli forniscono lo schema appropriato per i problemi di decomposizione. Fin qui non abbiamo enunciato che intenti, di cui si tratterà di vagliare la realizzazione. Fin d'adesso, per concludere l'osservazione sui ' fondamenti ' e tacendo sulla possibilità e la portata di una loro riuscita, possiamo dire che se di fondamenti si tratta essi sfuggono alla classica tripartizione tra logicisti, formalisti e intuizionisti. Qui non si intende assicurare un dominio che già c'è, né stabilire la grammatica che permetta la scrittura di quanto segue: non si tratta di scrivere, ma — se si vuole — di d e s c r i v e r e , o, per proporre un motto che avremo modo di rincontrare, è l a r i c e r c a d e l l ' u n i v e r s a l e i n m a t e m a t i c a (non quella del semplice o dell'originario) che ci si prefigge.

2. - On the foundation of abstract algebra.

Se l'algebra astratta è, genericamente, il luogo deputato alla formulazione di problemi in termini generali (ossia senza il riferimento a

[21] A testimonianza della fortuna singolare che questo termine ha avuto nella matematica del nostro secolo: si ritrova un po' dappertutto e la sua semantica (formale o informale) è sempre multiforme. Nondimeno Ore dichiara di averlo preferito a ' reticolo ' (*lattice*) perché quest'ultimo è stato usato in un'accezione matematica differente (senza per altro indicare quale). Motiva allora l'adozione del termine ' struttura ' (*structure*) con il fatto che essa appare « suggestive of the algebraic applications to the systems » (O. Ore, *On the decomposition theorems of algebra*, Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936).

dominî particolari) ed alla ricerca di completezza delle soluzioni connesse, cioè alla determinazione della specie di struttura piú comprensiva in cui un certo risultato è valido, una volta consolidata l'indagine lungo questo paradigma le strutture algebriche astratte e le rispettive teorie verranno a costituire un ' dato ', per cosí dire un dato di fatto, storicamente concretato: le strutture astratte possono essere allora esibite a titolo di ' oggetti semplici ' (per quanto decantati da un lungo percorso storico di astrazione ed individuazione), dal momento che è su di esse che la matematica, o quanto meno l'algebra astratta, indaga. Ora, l'architettura portante della teoria di una determinata struttura astratta si esprime normalmente in termini dei rapporti intercorrenti tra il sistema (per esempio il gruppo) ed una particolare famiglia di suoi sottosistemi (come i sottogruppi caratteristici o i sottogruppi normali), cioè in termini di rapporto tra il tutto e la parte. A questo punto, essendo la teoria dei reticoli l'ambientazione ' naturale ' di queste relazioni, si presenta la possibilità di reiterare il procedimento di astrazione proprio dell'algebra, astraendo questa volta dalle particolarità delle strutture, dal momento che i teoremi di decomposizione di differenti teorie algebriche presentano situazioni di stretta analogia, che diviene addirittura un'identità nel caso del teorema d'isomorfismo per i gruppi e per gli anelli:

$$\frac{S \cup T}{T} \simeq \frac{S}{S \cap T}$$

quando S e T vengano interpretati rispettivamente come sottogruppi normali [22] o ideali. Questa identità suggerisce — in certo senso esige — che le due strutture astratte provengano da un'origine comune ed è ragionevole supporre questo luogo di confluenza descrivibile in termini reticolari.

Il linguaggio dei reticoli, in effetti, si rivela adeguato all'espressione dei rapporti di questo tipo intercorrenti tra il dominio-ambiente (una determinata struttura) e alcuni particolari suoi sottosistemi. Torneremo piú avanti sui dettagli di questa corrispondenza: in ogni caso la sua ambientazione generale è costituita da una selezione, in seno all'insieme delle parti del sostegno della struttura algebrica che siano compatibili con le operazioni; essa dovrà costituire un reticolo. S'impongo-

[22] In realtà basta richiedere che il solo T sia normale, mentre S può essere un sottogruppo arbitraria. Le scritture $\frac{S \cup T}{T}$, $\frac{S}{S \cap T}$ rappresentano in questo caso gruppi o anelli quoziente.

no allora due osservazioni: innanzitutto ad una struttura algebrica non è associato univocamente un tale reticolo. Anzi, i casi piú interessanti non sono quelli riferentisi al reticolo di tutte le sottostrutture, ma a dominî piú ristretti che soddisfano condizioni supplementari [23]. Inoltre, due gruppi non isomorfi possono avere lo stesso reticolo dei sottogruppi: la trascrizioni reticolare sarà dunque necessariamente parziale, per lo meno nel caso generale [24].

Sono queste le condizioni in cui Ore si trova per effettuare [25] quella che chiama « formalizzazione dell'algebra astratta » [26], o anche « astrazione al secondo livello », effettuata cioè successivamente a quella operata dall'algebra astratta. Se quest'ultima può essere definita la teoria delle proprietà invarianti rispetto all'isomorfismo (non entrando in gioco la natura degli elementi sottomessi alle operazioni), nel caso della formalizzazione reticolare è l'esistenza stessa di questi elementi a venire dimenticata, dal momento che gli elementi che vengono qui sottoposti a operazioni (unione e intersezione) sono particolari sottostrutture. Questa stenografia del sistema originario basta ad Ore per poter esprimere alcune sue situazioni globali che, trasposte in astratto, caratterizzeranno simultaneamente modelli (cioè algebre) differenti; ma tali situazioni di decomposizione vengono espresse nel sistema di partenza in termini di isomorfismo, il che comporta necessariamente un riferimento ai suoi elementi, gli stessi che la versione reticolare sopprime. A questo punto Ore formula [27] la nozione di ' similitudine ' che sostituisce e implica (nel reticolo) quella di isomorfismo nei sistemi algebrici: di qui in avanti non si tratterà che di trascrivere (e dimostrare) i teoremi di decomposizione in termini reticolari.

Ciò che Ore si propone di allestire è dunque una classificazione (una teoria) dei topici di decomposizione dei sistemi algebrici, formulan-

[23] In particolare l'assioma di Dedekind.

[24] Cfr. la successiva nota 42.

[25] Salvo avviso contrario, ci riferiamo sempre ai due articoli costituenti *On the foundation of abstract algebra*, « Annals of Mathematics », XXXVI (1936) e XXXVII (1937).

[26] *On the decomposition theorem*, cit., p. 304.

[27] Non senza una certa enfasi, connessa alla dichiarazione di ' astrazione di secondo livello ' a cui abbiamo fatto cenno: la ' perdita ' degli elementi ne sarebbe una nota caratteristica, quasi che un'astrazione ' piú spinta ' costituisca comunque una nota di merito. In realtà Ore è obbligato a questo passo, dal momento che l'installarsi direttamente sull'insieme delle parti (o su qualche sua provincia) non può che offuscare la presenza delle costituenti ultime.

do esplicitamente lo schema che deve sorreggerne le organizzazioni interne nei termini globali che abbiamo incontrato (eliminazione del riferimento agli elementi del dominio). Di piú, la trascrizione cosí ottenuta « riduce le dimostrazioni al loro fondamento essenziale » [28], ossia individua le condizioni generali di validità delle decomposizioni in termini di proprietà del reticolo a cui sia possibile ricondurre le strutture modello: con questo chiarisce le modalità delle loro applicazioni e nel contempo — installata in un'ambientazione generale — fornisce nuovi risultati ed estensioni di risultati ottenuti in precedenza in riferimento a un dominio particolare. È quanto si ritiene garantisca, solitamente, il percorso lecito della generalizzazione.

Non resta che accostarvisi piú da vicino.

La presentazione dei concetti che opereranno la trascrizione reticolare delle proprietà di decomposizione dei sistemi algebrici avviene all'interno della teoria dei reticoli, anzi (benché si rivolga costantemente lo sguardo, anche nella scelta della notazione, a quanto dei fatti inerenti alle algebre si deve esprimere) abbiamo a fare con la teoria dei reticoli, o almeno con un suo capitolo.

R e t i c o l o è un insieme su cui sono introdotte due operazioni soddisfacenti le condizioni consuete, a partire dalle quali si definisce la relazione di inclusione tra elementi [29]. Poiché molti dei risultati saranno ottenuti nell'ambito dei reticoli modulari, enunciamo la condizione che li cotraddistingue:

(a s s i o m a d i D e d e k i n d)

$$\text{se } A\cup B\supset C\supset A, \text{ allora } C = A\cup(B\cap C)$$

Una forma equivalente è

$$\text{se } C\supset C' \text{ e } C\cap D = C'\cap D \text{ e } C\cup D = C'\cup D, \text{ allora } C = C'$$

Omomorfismo e isomorfismo tra due reticoli sono applicazioni univoca e biunivoca rispettivamente, che conservano le operazioni.

Ad ogni coppia di elementi confrontabili A e B di un reticolo $\mathfrak{R}$ è possibile associare l'insieme degli elementi di $\mathfrak{R}$ compresi tra A e B,

[28] *On the decomposition theorems*, cit., p. 299.

[29] Cfr. la precedente nota 11.

che viene detto quoziente di A e B. In simboli: se $A, B \in \mathfrak{R}$ e $A \supset B$

$$\frac{A}{B} = \{S \in \mathfrak{R} \mid A \supset S \supset B\}$$

Il quoziente di due elementi è a sua volta un reticolo e l'insieme dei quozienti definibili su un dato reticolo costituisce anch'esso un reticolo rispetto alle operazioni

$$\frac{A}{B} \cap \frac{A'}{B'} = \frac{A \cap A'}{B \cap B'} \qquad \frac{A}{B} \cup \frac{A'}{B'} = \frac{A \cup A'}{B \cup B'}$$

Il passagio al reticolo dei quozienti $\bar{\mathfrak{R}}$ di un dato reticolo $\mathfrak{R}$ immerge dunque il reticolo d'origine in un ambiente piú vasto dove vengono tuttavia conservate proprietà essenziali: per esempio, se $\mathfrak{R}$ possiede un elemento unità U anche $\bar{\mathfrak{R}}$ lo possiede e cosí per un elemento totale [30]; se il reticolo è modulare anche il reticolo quoziente lo è ed anche la condizione della catena finita [31] si conserva nel passaggio.

Se il reticolo è modulare si ottiene il seguente risultato

$$\frac{A \cup B}{B} \simeq \frac{A \cap B}{A}$$

dove A e B sono elementi qualsiansi del reticolo e l'isomorfismo va inteso in termini reticolari. Una scrittura, come si vede, identica a quella del teorema d'isomorfismo dei gruppi e degli anelli.

All'interno del reticolo dei quozienti si definiscono (parzialmente) nuove operazioni: la moltiplicazione tra quozienti

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$$

[30] Un elemento totale T del reticolo è un neutro rispetto all'intersezione, ovvero $T \cap A = A$ per ogni elemento A del reticolo; un elemento U è invece un neutro rispetto all'unione: $U \cup A = A$, con A elemento arbitrario. Se guardiamo all'ordinamento indotto nel reticolo (cfr. nota 10), tali elementi funzionano come massimo e minimo rispetto a ogni altro elemento.

[31] Se il numero di elementi del reticolo di ogni successione (ordinata rispetto all'inclusione) che collega due elementi $A = A_0 < A_1 < \ldots < A_n = B$ è comunque finito, si dice che il reticolo soddisfa la condizione della catena ascendente. Invertendo le inclusioni si ottiene la condizione della catena discendente. Ognuna di queste due condizioni si conserva nell'immersione ai quozienti.

non esprime altro che la ' componibilità ' tra quozienti e si può effettuare quando il primo membro ha come ' denominatore ' il ' numeratore ' del secondo. Per quozienti dallo stesso ' denominatore ', $\mathbf{A} = \frac{A}{B}$ $\mathbf{C} = \frac{B}{C}$, si definisce l'operazione di trasformazione:

$$\tau(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mathbf{CAC}^{-1} = \frac{A \cup C}{C}$$ [32]

Nel caso dei reticoli modulari si considera un tipo particolare di trasformazione: se una coppia di quozienti è legata dalla relazione di avere identico denominatore e intersezione dei rispettivi numeratori uguale al denominatore stesso, la trasformazione prende il nome di t r a s f o r m a z i o n e s i m i l e . Il risultato che abbiamo richiamato alla pagina precedente si può allora esprimere nei seguenti termini: se un quoziente è stato ottenuto da un altro quoziente attraverso una trasformazione simile, i reticoli associati ai due quozienti sono isomorfi.

In simboli: se $A, B, C \in \mathfrak{R}$ (modulare) e se $A \supset B$, $C \supset B$, $A \cap C = B$,

$$\text{allora } \tau\left(\frac{A}{B}, \frac{C}{B}\right) = \frac{A \cup C}{C} \simeq \frac{A}{B}$$

Nel caso di trasformazioni simili si dice anche che $\mathbf{CAC}^{-1}$ è stato ottenuto da $\mathbf{A}$ attraverso un' ' espansione ' con $\mathbf{C}$, o che all'inverso $\mathbf{A}$ proviene da $\mathbf{CAC}^{-1}$ attraverso una ' contrazione ' con $\mathbf{C}$.

A questo punto Ore può formulare la nozione di ' similitudine ': due quozienti verranno detti s i m i l i se l'uno può essere ottenuto dall'altro attraverso una successione di espansioni o contrazioni. La similitudine cosí introdotta è una relazione di equivalenza definita sul reticolo dei quozienti; pertanto i reticoli associati a quozienti simili sono isomorfi.

Veniamo ora ad alcuni risultati e a qualche loro referente algebrico, che esporremo ' in parallelo '.

[32] La notazione $\mathbf{CAC}^{-1}$ (a prescindere dalla circostanza del ricalco della forma di scrittura del coniugio gruppale) è motivata dal fatto che la componente $\mathbf{C}^{-1}$ rappresenta in effetti ' l'inverso ' di una moltiplicazione tra quozienti, essendo definito da $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}^{-1}$. La trasformazione $\mathbf{CAC}^{-1} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \times \times \mathbf{C}^{-1}$ si configura allora come operazione derivata.

Teoria dei reticoli modulari

C a t e n a p r i n c i p a l e tra due elementi del reticolo A, B è una successione finita

$$A = A_0 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n = B$$

dove, per ogni $i = 1, \ldots, n$:

A_{i-1} è p r i m o s u A_i

(cioè non esiste un elemento K del reticolo tale che $A_i \subset K \subset A_{i-1}$); in questo caso

$$A_{i-1}/A_i = \{A_{i-1}, A_i\}$$

e viene detto s e m p l i c e .

(T e o r e m a d i J o r d a n - H ö l d e r n e i r e t i c o l i m o d u l a r i)

Se esistono due catene principali

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = B$$
$$A = B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_m = B$$

allora $m = n$ e i quozienti

$$\frac{A_{i-1}}{A_i}, \quad \frac{B_{i-1}}{B_i}$$

sono simili.

(T e o r e m a d i S c h r e i e r n e i r e t i c o l i m o d u l a r i)

Se un quoziente A/B ammette due decomposizioni-prodotto

$$A/B = A/B_1 \times B_1/B_2 \times \ldots \times B_n/B$$
$$= A/C_1 \times C_1/C_2 \times \ldots \times C_r/B$$

allora è possibile decomporre i fattori dei due prodotti, in modo che le decomposizioni-prodotto che si ottengono siano ancora finite, abbiano lo stesso numero di fattori e i fattori siano simili in coppia.

Teoria dei gruppi

S e r i e p r i n c i p a l e tra due sottogruppi normali A e B del gruppo è una successione finita

$$A = A_0 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n = B$$

dove, per ogni $i = 1, \ldots, n$: A_i è sottogruppo normale m a s s i m a l e di A_{i-1} (cioè non esiste K sottogruppo normale di A_{i-1} con $K \supset A_i$); in questo caso il gruppo quoziente A_{i-1}/A_i non contiene sottogruppi normali propri e si dice s e m p l i c e .

(T e o r e m a d i J o r d a n - H ö l d e r)

Se esistono due serie principali

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = B$$
$$A = B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_m = B$$

allora $m = n$ e i gruppi quoziente

$$\frac{A_{i-1}}{A_i}, \quad \frac{B_{i-1}}{B_i}$$

sono isomorfi.

(T e o r e m a d i S c h r e i e r)

Se esistono due successioni

$$A \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset B$$
$$A \supset C_1 \supset \ldots \supset C_r \supset B$$

tra due sottogruppi normali A e B in cui ogni membro è sottogruppo normale del precedente, allora è possibile intercalare in ciascuna delle successioni un numero finito di membri in modo che le successioni risultanti godano ancora della proprietà delle precedenti, abbiano un numero uguale di membri e i gruppi quoziente (ottenibili come nel teorema precedente) risultino isomorfi.

Come si può agevolmente vedere, i teoremi della teoria dei gruppi tradotti nel linguaggio reticolare risultano praticamente indistinguibili dalla loro versione originaria, salvo che in un punto. Nel primo esempio che abbiamo addotto ci si trova di fronte alla seguente situazione: dal momento che l'insieme dei sottogruppi normali di un gruppo costituisce un reticolo modulare (e che il sottogruppo normale di un sottogruppo normale è a sua volta sottogruppo normale del gruppo ambiente), i sottogruppi normali vengono trattati direttamente come elementi del reticolo ed i risultati ottenibili al riguardo di quest'ultimo si traducono automaticamente in termini di proprietà (reticolari) dei sottogruppi in questione. L'ambientazione, per cosí dire, è diretta: il teorema di Jordan-Hölder non richiede altro che situazioni reticolari, con la sola eccezione della conclusione, giacché il corrispettivo dell'isomorfismo gruppale diviene, nel reticolo, la similitudine.

Una situazione del tutto analoga si riscontra nel secondo teorema: se si pensa al significato insiemistico del reticolo quoziente e della moltiplicazione tra quozienti, ritroviamo — rispetto alla versione gruppale — una descrizione perfettamente aderente, salvo che nella conclusione: la similitudine sostituisce ancora l'isomorfismo.

Se allora mantenessimo il piano interpretativo al livello che abbiamo chiamato ' diretto ', *a priori* saremmo garantiti esclusivamente del fatto che i sottogruppi quoziente A_{i-1}/A_i e B_{i-1}/B_i hanno isomorfi i rispettivi reticoli dei sottogruppi normali (che è quanto la similitudine, come s'è visto, implica). Ma si è già detto che questa sola circostanza non comporta in generale l'isomorfismo tra i due gruppi; eppure ciò è precisamente quello che si deve richiedere affinché la corrispondenza risulti fedele: che la similitudine tra i reticoli quoziente, cioè, implichi l'isomorfismo tra i corrispondenti gruppi quoziente.

Che cosa tuttavia è in grado di garantirlo? Evidentemente soltanto il fatto che nei gruppi, per ogni coppia di sottogruppi A e B di cui almeno il secondo sia normale, vale sempre l'isomorfismo [33]:

$$\frac{A \cup B}{A} \simeq \frac{B}{A \cap B}$$

(seconda legge di isomorfismo gruppale)

[33] Dove l'unione è da interpretarsi come sottogruppo generato da, l'intersezione come parte comune.

Tale è infatti la forma che esprime le trasformazioni simili, e poiché l'isomorfismo (in particolare l'isomorfismo gruppale) è una relazione di equivalenza, se una trasformazione simile (nel reticolo) implica l'isomorfismo gruppale, allora l'isomorfismo verrà conservato dalla relazione di similitudine che non è altro che un'applicazione iterata di trasformazioni simili.

Ora, il fatto che una trasformazione simile implichi l'isomorfismo gruppale avviene perché tale trasformazione r i c a l c a l a f o r m a di un risultato valido nella teoria dei gruppi, e non perché ne esprima una struttura reticolare soggiacente (a meno che non si riesca a dimostrare che questo teorema d e l l a t e o r i a d e i g r u p p i sia ottenibile nella versione reticolare a cui i gruppi possono essere sottomessi).

Cominciamo cosí a intravedere qual è la natura della nozione di similitudine, rudimentale sostituto dell'isomorfismo che richiede il concorso delle teorie e non solo quello della caratterizzabilità reticolare delle strutture modello. In altri termini, la riduzione che Ore si prefigge di effettuare esige uno sviluppo autonomo dell'universo che ha il compito di descrivere: perché la traduzione reticolare risulti fedele, occorre pertanto che nel sistema algebrico tradotto sussista un isomorfismo analogo a quello che la seconda legge di isomorfismo tra gruppi assicura. In tal caso il reticolo associato alla struttura avrà come corrispondenti delle operazioni di unione e intersezione quanto è contenuto nella scrittura

$$(*) \qquad \frac{A \cup B}{A} \simeq \frac{B}{A \cap B}$$

che va intesa nel linguaggio del sistema algebrico da caratterizzare (cosí nel caso dei gruppi l'unione esprimerà il sottogruppo generato dalla coppia di sottogruppi A e B, dove entra in gioco anche la natura di questi ultimi).

Il reticolo delle sottostrutture speciali è pertanto indotto dalla validità dell'isomorfismo (*) nella struttura algebrica considerata, e la traduzione in termini reticolari può eventualmente perdere qualcosa di non trascurabile di quanto l'isomorfismo (*) esprime. Nel caso dei gruppi, per esempio, per la validità di (*) è richiesto che il solo B debba essere un sottogruppo normale, mentre A può essere un sottogruppo arbitrario; tuttavia la caratterizzazione reticolare si installa direttamente nell'ambito dei soli sottogruppi normali, giacché sono questi a costituire il reticolo modulare in cui è valido (*)[34].

Assistiamo cosí a uno scarto che si verifica nell'interpretazione delle proprietà reticolari nei particolari dominî algebrici; del resto la corrispondenza reticolo-quoziente → gruppo-quoziente associa due oggetti di natura diversa. Talvolta[35] Ore dichiara che i quozienti nei reticoli c o r r i s p o n d o n o ai laterali nella teoria dei gruppi o alle classi di resti nella teoria degli ideali, ma piú che matematica la corrispondenza in questione appare analogica: le sole situazioni nei reticoli che *a priori* possano esser garantite son quelle che abbiamo indicato come suscettibili di un'interpretazione diretta, mentre un gruppo o un anello quoziente presentano un assetto distinto da quello del corrispondente oggetto reticolare, e un loro apparentamento può passare soltanto attraverso l'isomorfismo (*). Nondimeno Ore sostiene che riguardo a situazioni di decomposizione di sistemi algebrici è sufficiente considerare una particolare famiglia di isomorfismi: quelli, per l'appunto, definibili attraverso un'iterazione di (*), vale a dire quelli che trovano un corrispettivo nella nozione di similitudine. Ma ciò significa che i risultati della teoria dei reticoli in cui compaia tale nozione saranno interpretabili nelle algebre astratte[36] alla stregua di isomorfismi soltanto quando (*) abbia validità e significato corrispondente ai termini delle operazioni reticolari dell'algebra in questione.

Esaminiamo ancora qualche trascrizione reticolare di risultati noti in teoria dei gruppi e in teoria degli anelli, per riscontrare su esempi particolarmente semplici i meccanismi di questo scambio ambientale.

[34] In compenso lo stesso isomorfismo (*) si presta a caratterizzazioni multiple: per esempio, dato un sottogruppo arbitrario A di un gruppo G, l'insieme dei sottogruppi di G contenuti in A che risultano normali rispetto ad A (inteso come gruppo-ambiente) costituisce un reticolo. Se A è normale in $A \cup B$, allora l'isomorfismo $(A \cup B)/A \simeq B/(A \cap B)$ esprime la corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei sottogruppi normali di $A \cup B$ e quello dei sottogruppi normali di B contenenti $A \cap B$.

Cfr. O. Ore, *On the theorem of Jordan-Hölder*, « Transactions of the American Mathematical Society », XLI (1937); qui Ore formula anche condizioni affinché l'isomorfismo della forma (*) valga anche nel caso generale in cui intervengano sottogruppi arbitrari a titolo di componenti.

[35] Ore, *On the foundation ...*, I, p. 407.

[36] Quando Ore nomina l' a l g e b r a a s t r a t t a la intende in senso stretto (studio delle strutture con operazioni finitarie), e non nell'accezione onnicomprensiva della definizione di Birkhoff.

TEORIA DEI RETICOLI MODULARI	TEORIA DEI GRUPPI
Un quoziente $\mathbf{M} = M/M_0$ si dice direttamente decomponibile se esistono due quozienti con lo stesso denominatore di $\mathbf{M}$, $\mathbf{A} = A/M_0$ e $\mathbf{B} = B/M_0$, tra loro relativamente primi (cioè tali che $A \cap B = M_0$) per i quali si abbia $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. In caso contrario $\mathbf{M}$ si dice direttamente indecomponibile.	Un gruppo G è prodotto diretto di due suoi sottogruppi A, B se $G = A \cup B$ e inoltre A e B non hanno elementi in comune eccettuato l'elemento neutro u del gruppo G. Se un gruppo non è rappresentabile sotto forma di prodotto diretto viene chiamato direttamente indecomponibile.
Teorema: [37] se ogni successione di elementi di un quoziente $\mathbf{M}$ ordinata rispetto all'inclusione ha un numero finito di componenti [38] allora, se esistono due decomposizioni dirette di $\mathbf{M}$ in quozienti direttamente indecomponibili, esse presentano egual numero di componenti. Inoltre, ad ogni quoziente che compare nella prima decomposizione ne corrisponde uno della seconda direttamente simile al primo, e viceversa; ogni componente di una qualsiasi delle due decomposizioni può essere sostituita da una componente dell'altra convenientemente scelta, fornendo ancora una decomposizione diretta.	Teorema di Remak - Schmidt: se ogni successione di sottogruppi normali di G ordinata rispetto all'inclusione ha un numero finito di componenti allora, se esistono due rappresentazioni del gruppo G come prodotto diretto di componenti direttamente indecomponibili, esse hanno egual numero di componenti, e queste sono a due a due centralmente isomorfe. In ognuno dei due prodotti diretti un fattore arbitrario può esser sostituito da un fattore dell'altro prodotto che risulti centralmente isomorfo rispetto ad esso, ottenendo con ciò ancora un prodotto diretto di fattori indecomponibili.

Innanzitutto precisiamo il significato dei termini che compaiono spaziati negli enunciati: si dice sussistere similitudine diretta tra due quozienti $\mathbf{A} = A/A_0$, $\mathbf{B} = B/A_0$ quando esista un terzo quoziente $\mathbf{C} = C/A_0$, relativamente primo con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (ossia tale che $A \cap C = B \cap C = A_0$), per il quale risulta $\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{CBA}^{-1}$ ovvero, in termini di quozienti, $\dfrac{A \cup C}{C} = \dfrac{B \cup C}{C}$, il che non significa altro se non l'eguaglianza dei rispettivi numeratori: $A \cup C = B \cup C$. Riassumendo, abbiamo dunque: A/A_0 e B/A_0 sono direttamente simili se e solo se esiste C/A_0 tale che $A \cap C = B \cap C = A_0$ e $A \cup C = B \cup C$.

[37] *On the fondation ...*, II, p. 272, Teorema 1.

[38] L' inclusione va intesa ovviamente in senso stretto; la condizione richiesta è quindi quella della catena finita (ascendente e discendente).

Veniamo ora alla nozione di isomorfismo centrale: due sottogruppi H, K di un gruppo G si dicono centralmente isomorfi quando il quoziente dei rispettivi elementi ($h \cdot k^{-1} = c$ quali che siano $h \in H$, $k \in K$) giace nel centro C del gruppo (insieme degli elementi $c \in G$ per i quali risulti $c \cdot a = a \cdot c$ per ogni elemento $a \in G$).

Sennonché il teorema reticolare parla di quozienti, mentre nel corrispettivo gruppale questi non compaiono. Per ritrovare il teorema di Remak-Schmidt occorre in effetti particolarizzare la sua versione reticolare al caso in cui il quoziente-ambiente $\mathbf{M}$ sia costituito dal gruppo quoziente $G/\{u\}$ dove u è l'elemento neutro del gruppo e $\{u\}$ il sottogruppo costituito da questo solo elemento. Come elementi del quoziente (reticolare) $\mathbf{M}$ verranno poi considerati i sottogruppi normali di G: otterremo in tal modo una decomposizione diretta di $\mathbf{M}$ con fattori $A/\{u\}$, dove A è normale in G. Dal momento che sussiste un isomorfismo (gruppale) tra G e $G/\{u\}$ la corrispondenza reticolo-gruppo è riportata allo stesso livello: in pratica si eliminano i quozienti. Infine la nozione di similitudine diretta si esprime in questo caso attraverso le condizioni $A \cap C = B \cap C = \{u\}$; $A \cup C = B \cup C$, che si rivelano equivalenti a quelle che definiscono un isomorfismo centrale.

Il trasporto è pertanto assicurato, e la versione reticolare si mostra fedele. Incontriamo una situazione analoga nel caso degli ideali:

Teoria dei reticoli modulari	Teoria degli anelli commutativi
Un quoziente $\mathbf{A} = A/A_0$ vien detto riducibile se esistono $\mathbf{B} = B/A_0$, $\mathbf{C} = C/A_0$ contenuti propriamente in $\mathbf{A}$ e tali che $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$. Contrariamente è detto irriducibile.	Un ideale $\mathbf{I}$ si dice riducibile se esistono due ideali $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ contenenti propriamente $\mathbf{I}$ e tali che $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2$. In caso contrario è detto irriducibile.
Teorema: [39] se ogni successione di elementi di $\mathbf{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n$ (inclusione propria), ha sempre un numero finito di componenti allora il quoziente $\mathbf{A}$ può venir decomposto in unione di componenti irriducibili.	Teorema (prima decomposizione degli ideali): se ogni successione di ideali $\mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{I}_n$ (inclusione propria) non può avere che un numero finto di termini allora ogni ideale può venir rappresentato come intersezione d'ideali irriducibili.
Se esistono due decomposizioni proprie: $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{B}_r$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{C}_s$	La rappresentazione può non essere unica, ma se ne esistono due differenti, che siano ridotte (dove, cioè, nessuna componente contiene l'intersezione

[39] *On the foundation ...*, II, p. 270, Teorema 11.

(tali cioè che nessuna delle componenti della decomposizione sia contenuta nell'unione delle rimanenti) allora risulta $r = s$. Un risultato ulteriore è che la sola esistenza di due decomposizioni proprie (assunzione piú debole della condizione della catena discendente) assicura l'uguaglianza del numero delle componenti.

delle restanti o è contenuta propriamente in un altro ideale dell'anello), allora esse hanno egual numero di componenti.

Per poter rappresentare questo risultato reticolare nei termini di teoria degli anelli (quali abbiamo riportato a fronte), occorre anche in questo caso particolarizzare il teorema al quoziente $\mathbf{A} = A/\{0\}$, anello quoziente costruito sull'ideale 'nullo', che la teoria degli anelli prova essere isomorfo all'anello A. La corrispondenza è allora assicurata dall'impianto duale che sorregge l'intera architettura dei reticoli, espresso dal principio di dualità: se una proposizione è conseguenza degli assiomi del reticolo, allora ne è conseguenza anche la 'duale', ottenuta dalla prima mutando ovunque l'intersezione in unione e viceversa (e pertanto mutando anche il verso delle inclusioni, ove queste compaiano). Ciò deriva dalla forma duale degli assiomi che definiscono il reticolo.

Rinvenuta la corrispondenza, la condizione piú debole per la validità del risultato potrà allora essere applicata agli anelli: il teorema di decomposizione di ideali vale dunque in un anello (commutativo) qualsiasi, una volta ammessa l'esistenza di due rappresentazioni ridotte.

Negli ultimi due casi di 'traduzione' reticolare che abbiamo proposto possiamo osservare come la corrispondenza rispetto alle versioni algebriche non venga fornita 'direttamente': il percorso per rintracciare gli originali è obliquo, dovendo passare attraverso particolarizzazioni di vario tipo, in particolare attraverso due situazioni limite delle strutture quoziente (e della relazione di similitudine diretta). Nondimeno, per quanto il rispecchiamento possa non risultare trasparente, nitida è la situazione che esso è in grado di sorreggere: siamo di fronte a due casi in cui la teoria dei gruppi e quella degli anelli si comportano come teorie modello. Qui i reticoli parlano effettivamente il linguaggio della generalità: le decomposizioni dei gruppi e degli anelli trovano, ambientate tra i reticoli, un loro corrispondente generale che, ritrasportato in termini di gruppo (o anello), esprime una situazione plurivoca, valendo simultaneamente nei casi in cui i reticoli quoziente vengano interpretati come gruppo o anello quoziente proprio. Resta valida anche una caratterizzazione diretta in riferimento all'ultimo caso, dove cioè non si rivolti il risultato nel suo duale, ma si mantenga il senso delle inclusioni e delle operazioni come si presenta nel testo.

Possiamo prescindere dall'interesse che interpretazioni di questo tipo possono avere (il referente gruppale della similitudine diretta è significativo: se i quozienti **A** e **B** — definiti come in precedenza — sono direttamente simili, allora il numeratore C del quoziente **C**, che stabilisce l'uguaglianza $\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{CBC}^{-1}$, risulta essere il centro del gruppo $A \cup B$, ossia il sottogruppo di $A \cup B$ costituito dagli elementi permutabili con ogni elemento del gruppo). Quello che ci preme sottolineare è che nelle due situazioni è la sola struttura reticolare dell'insieme dei sottogruppi normali o degli ideali ad essere in grado di assicurare la decomposizione: la stessa individuazione del gruppo (o dell'anello) come caso limite di quoziente è assicurata dalla teoria dei reticoli, perché il reticolo $\bar{\mathfrak{R}}$ costituito dai quozienti definiti sul reticolo $\mathfrak{R}$ contiene un sottoreticolo isomorfo a $\mathfrak{R}$. Isomorfo in senso reticolare, ovviamente; ma ciò basta a garantire il risultato, perché nelle decomposizioni gruppali o anellari (nella loro versione algebrica) gruppo e anello non intervengono in effetti che a titolo di reticolo ambiente.

Se nello scritto *On the foundation of abstract algebra* abbiamo assistito al tentativo di ricondurre situazioni notevoli delle algebre astratte (i loro 'topici' di decomposizione, appunto) alla loro espressione reticolare, in un successivo lavoro [40] Ore si pone sullo stesso livello della teoria dei gruppi e cerca di caratterizzare l'oggetto gruppale in termini reticolari anche al di là delle sue situazioni decompositive fondamentali: il proposito è insomma di « applicare i princìpi della teoria dei reticoli ai fondamenti della teoria dei gruppi » [41], ossia di sviluppare questa teoria per quanto possibile sulle proprietà dei sottogruppi, eliminando gli elementi dalle dimostrazioni. L'ambientazione dei gruppi in un paesaggio reticolare fornisce, a detta del suo artefice, « nuovi punti di vista sistematici » [42].

[40] O. Ore, *Structure and group theory*, « Duke Mathematical Journal », vol. III (1937) e vol. IV (1938).

[41] *Ibid.* (1937), p. 149.

[42] *Ibid.* « Un punto di vista sistematico » alternativo è offerto da un lavoro di Reinhold Baer (*The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, « American Journal of Mathematics », 1938); cfr. anche, dello stesso autore, *The applicability of lattice theory to group theory* (resoconto informale dell'articolo precedente), « Bulletin of the Am. Math. Soc. », XLIV, 1938): è inte-

Senza pronunciarci in merito alla visuale cosí ottenuta, ci limitiamo ad osservare alcuni fatti, significativi dal n o s t r o punto di vista, che si presentano in questi articoli.

ressante notare che Baer adotta il termine 'struttura' in senso tecnico (per quanto informale) con il significato (oggi) ordinario, denominato (nel 1938) appunto 'ordinario': « Here I use the term 'structure' i n t h e c u s t o m a r y s e n s e that two groups have the same structure if they are isomorphic » (*The applicability ...*, cit., p. 817, spaziatura nostra). Nell'articolo appena citato Baer osserva che l'applicabilità di cui si fa menzione può essere intesa (come influenza del generale sul particolare) in due accezioni: si può in primo luogo tentare una generalizzazione dei teoremi di teoria dei gruppi « allo scopo di individuare il loro posto nell'armatura più generale della teoria dei reticoli », oppure provare a risolvere problemi (aperti) di teoria dei gruppi attraverso i mezzi forniti dalla teoria dei reticoli. (Queste due direzioni possono essere assunte come caratterizzazione delle 'ambizioni' di Ore, rispettivamente del 1935-36 e del 1937-38, che abbiamo citato). Ma prima di intraprendere la seconda impresa tanto vale consultare l'oracolo: Baer compie in effetti un sopralluogo preliminare sulla traducibilità reticolare delle situazioni gruppali. Il problema consiste dunque nella possibilità di « riformulare i risultati in termini di teoria dei reticoli » e in questo senso lo scritto di Baer rappresenta il contraltare (quanto meno il preventivo) del programma di Ore.

Un approccio piú dettagliato si delinea nei termini seguenti: i teoremi di teoria dei gruppi che hanno a fare con la 'manipolazione' di sottogruppi e non di elementi risultano costituire casi particolari della teoria dei reticoli. Piú precisamente, se un gruppo G è isomorfo (in senso gruppale) ad ogni gruppo il cui insieme di sottogruppi sia isomorfo (reticolarmente) a quello dei sottogruppi di G, allora la struttura di G è dominata dalla teoria dei reticoli. Si tratterà pertanto di indagare sui rapporti tra isomorfismo gruppale e isomorfismo reticolare (ovverosia tra l'isomorfismo definito sugli elementi dei due gruppi e quello definito sull'insieme dei rispettivi sottogruppi). Baer (*op. cit.*, p. 819) osserva che la storia di questi problemi è antecedente al « moderno *revival* della teoria dei reticoli » (datato 1933): Rottlaedner in effetti esibisce nel 1928 esempi di gruppi non isomorfi i cui reticoli dei sottogruppi viceversa lo sono. Nondimeno Baer può affermare che tali esempi costituiscono l'eccezione piuttosto che la regola e che vengono meno (se non altro nel caso dei gruppi abeliani) quando il reticolo dei sottogruppi non è 'troppo piccolo' (benché « l'esistenza di tali 'piccoli' controesempi complichi le dimostrazioni, dal momento che ogni gruppo 'piú grande' può contenere qualcuno di quelli 'piú piccoli' come sottogruppo o gruppo quoziente » (*ibid.*)).

Introduciamo il seguente vocabolario: un'applicazione univoca f definita sull'insieme dei sottogruppi del gruppo G è detta 'isomorfismo reticolare' del gruppo G sul gruppo H se sono soddisfatte le condizioni:

1) per ogni sottogruppo S di G, $f(S)$ è un sottogruppo di H;
2) per ogni sottogruppo S' di H esiste un sottogruppo S di G tale che $f(S) = S'$;
3) $S \subseteq T \Leftrightarrow f(S) \subseteq f(T)$.

Se S è sottogruppo di T indichiamo con $|T:S|$ l' i n d i c e di T su S (ovvero il numero delle classi di T modulo S: due elementi a, b di T appartengono alla stessa classe (o anche allo stesso l a t e r a l e) se e soltanto se $a \cdot b^{-1} \in S$).

Un isomorfismo reticolare tra due gruppi tale che $|T:S| = |f(T):f(S)|$

Ad una prima situazione siamo condotti dalla possibilità di definire nei reticoli la struttura di quoziente senza limitazione rispetto alle componenti che la individuano (posto soltanto che il numeratore includa il denominatore). Al livello rarefatto della caratterizzazione reticolare si perde, in altre parole, la motivazione gruppale di restringere la costruzione dei quozienti ai sottogruppi normali (compatibilità rispetto alla struttura di gruppo). Possiamo allora considerare come sistema ambiente l'insieme di tutti i sottogruppi di un gruppo, e su questo costruire il reticolo dei quozienti: da un punto di vista puramente reticolare questa considerazione sembrerebbe imporsi in modo naturale, presentandosi pariteticamente rispetto alla sua restrizione ai sottogruppi normali (salvo per il fatto che non si ottiene piú, in generale, un reticolo modulare).

Possiamo allora esaminare quale sia il corrispondente algebrico di quest'oggetto. Assistiamo in questo modo all'effetto di ritorno della formalizzazione sul suo referente 'concreto': il quoziente (reticolare) costruito su un qualsiasi sottogruppo di un gruppo individua una struttura particolare, detta 'multigruppo', che si discosta dal gruppo ordinario sostanzialmente per il fatto che la legge di composizione che vi si definisce (analogo dell'operazione gruppale) non è piú univoca, ma fornisce come risultato un insieme di elementi dell'insieme sostegno (nel nostro caso un insieme di 'laterali'). Nondimeno questa operazione è ancora associativa, esiste un unico elemento che funge da neutro (a destra) e per ogni elemento del multigruppo ne esiste almeno un altro che costituisce una versione approssimata dell'inverso.

Un secondo fatto è costituito dalla riapparizione degli elementi,

(ogni volta che la scrittura precedente abbia senso) è detto 'conservativo degli indici'.

Se poi risulta tale per cui S è normale in G se e soltanto se $f(G)$ è normale in H, allora vien detto isomorfismo (reticolare) 'normale'.

Possiamo precisare a questo punto il risultato di Rottlaender: esistono gruppi finiti non isomorfi benché tra essi sussista un isomorfismo reticolare normale e conservativo degli indici. Sebbene ogni isomorfismo gruppale (tra elementi) induca un isomorfismo reticolare normale e conservativo degli indici, non è dunque sempre vero l'inverso. Tuttavia, affinché un isomorfismo reticolare (arbitrario) sia indotto da un isomorfismo gruppale sono sufficienti alcune condizioni, tra cui ricordiamo: G possiede soltanto sottogruppi normali; G è abeliano e contiene due elementi indipendenti d'ordine infinito.

Menzioniamo altri risultati più generali: se f è un isomorfismo reticolare conservativo dell'indice tra due gruppi abeliani, allora questi sono isomorfi anche in senso gruppale; identico risultato si ottiene richiedendo che f sia conservativo dell'indice e normale e che il gruppo ove è definito sia simmetrico o alterno.

gli stessi che la caratterizzazione reticolare — non potendo agirvi direttamente — avrebbe dovuto omettere. Se i reticoli non hanno presa sugli elementi, la caratterizzazione delle sottostrutture del gruppo sembra esigerli: il comportamento delle costituenti ultime appare cosí ineliminabile e per non rimanere in superficie l'ispezione reticolare della struttura di gruppo deve richiederne il concorso.

Piú che ' fondare ', il reticolo sembra dunque integrarsi nelle strutture astratte: l'astrazione ulteriore che esso opera non è propriamente uno sfrondare dall'accessorio determinate situazioni che hanno luogo nelle algebre. Il territorio delle ' essenze ' che si sarebbe dovuto conquistare appare piuttosto un'ambientazione spoglia: delle strutture astratte i reticoli costituirebbero allora uno scenario che, se è in grado di aderire appropriatamente ad alcune loro situazioni globali, non è comunque autosufficiente.

Nondimeno abbiamo visto il linguaggio reticolare funzionare adeguatamente nel caso delle descrizioni di decomposizione ed è qui, in effetti, che ha luogo il discorso fondazionale di Ore, una volta che si ammetta con lui che sono i fatti di decomposizione a costituire la fisionomia delle teorie algebriche. I reticoli individuerebbero l'ambientazione in profondità delle algebre, uno schema implicito che queste porterebbero in sé: dalla riconducibilità di teoremi di decomposizione al supporre che quello dei reticoli sia *il* linguaggio che le algebre parlano, se non proprio il luogo della loro coabitazione ancestrale, il passo è breve ed è questo che può legittimare un'accezione del termine ' fondamento ' in senso forte. Il fatto poi che la resa reticolare sia solo parziale e che le algebre debbano essere inevitabilmente popolate di ' individui ', sembra limitare la portata ma non la posizione del discorso fondazionale. Questo agisce in senso orizzontale: l'irriducibilità delle strutture algebriche all'unico schema reticolare appare palese. Ma Ore non ha di mira un riduzionismo di questo tipo (la cui possibilità coinciderebbe in modo diretto con la possibilità dello stesso discorso fondazionale), perché sua preoccupazione precipua è la caratterizzazione di fatti concernenti le algebre in termini di un'unica configurazione che le sorreggerebbe, il reperimento di invarianze riconducibili ad un disegno comune: è sui risultati, non sui termini primitivi, che una tale attitudine si esercita, ed in questo senso possiamo distinguerla da fondazioni d'indirizzo ' verticale ' o riduzionismi. L'universo del discorso fondazionale di Ore è costituito da oggetti astratti, di cui il linguaggio reticolare fornisce la decifrazione di alcune costanti, sottratte dai dominî che le rivelano e riformulate in un ambiente omogeneo: Ore può allora affermare che la teoria dei reticoli fornisce un « retroterra adeguato »[43] per l'algebra astratta.

Ma la semplice possibilità di questa ' formalizzazione ' non costituisce evidentemente un sufficiente criterio di valutazione: altre considerazioni saranno richieste (di economia, comodità, fecondità e via dicendo). Quel che è mancato al programma di Ore è stata in effetti la fortuna: per quanto ne sappiamo esso rimane, al di là dei lavori di cui abbiamo riferito, lettera morta[44]. In *Lattice Theory* (il testo che costituisce la sintesi, fors'anche la conclusione, delle ricerche ' generalizzanti ' sui reticoli e il compimento del discorso che li privilegiava rispetto alle altre strutture), Birkhoff cita i risultati di Ore come contributi singolari, mentre ne sottace il programma globale. Gli interventi della teoria nell'algebra astratta vengono declassati al rango di mere ' applicazioni ', mentre quelli nelle altre branche della matematica — per quanto compongano uno spettro vastissimo — non sono piú accompagnati da enfasi ' fondatrici '[45].

Il discorso piú ambizioso costruito sui reticoli non ha dunque coinciso con quello effettivamente praticato, che assume la forma finale di una geografia delle zone d'applicazione della teoria dai propositi ben piú modesti, pur estendendosi su una moltitudine di regioni matematiche apparentemente prive di connessione.

3. - ESPLORAZIONE DI ALTRI TERRITORI: TOPOLOGIE E LUOGHI ANNESSI.

Parallelamente all'ispezione che i reticoli si mostrano in grado di compiere in seno all'algebra astratta, altri settori della matematica si

[43] Ore, *On the foundation ...*, II, p. 265.

[44] A proposito della ' fortuna ' di Ore, abbiamo constatato che la stretta analogia intercorrente tra la legge di isomorfismo per gruppi e quella per anelli non trovava, nei fatti, esplicazione nella comune trascrizione reticolare ma anzi costituiva una sorta d'artificio occasionale su cui far riposare un possibile rafforzamento della presa reticolare su quelle strutture. Una generalizzazione che riesce a rendere ragione dell'affinità tra le due leggi è fornita invece dalla nozione di ' gruppo con multioperatori ', dovuta a Higgins, entro la quale è possibile individuare una sottostruttura in grado di sussumere i concetti di sottogruppo normale e di ideale a titolo di casi particolari (cfr. P. J. Higgins, *Groups with multiple operators*, « Proceedings of the London Mathematical Society », VI, 1956).

[45] Gli stessi risultati di Birkhoff che abbiamo descritto nel precedente paragrafo appaiono a margine in *Lattice Theory* (vendo per lo piú relegati entro una succinta *Foreword on Algebra*).

prestano ad interpretazioni reticolari: occorrerebbe redigere una mappa circostanziata delle situazioni matematiche che in questo periodo vengono assoggettate al linguaggio dei reticoli e la sola lista risulterebbe considerevolmente estesa. Per parte nostra ci limiteremo a fornirne una esemplificazione sommaria (in nota)[46], mentre osserveremo piú da vi-

[46] Tra i testi antecedenti *Lattice Theory* di Birkhoff che offrono un panorama degli interventi dei reticoli in branche diverse della matematica (e che sono pertanto indicativi di quello che abbiamo chiamato ' paradigma reticolare ') possiamo citare: F. Klein-Barmen, *Grundzüge der Theorie der Verbände*, « Mathematische Annalen », CXI (1935); G. Koethe, *Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektive Geometrie*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung », XLVII (1937); V. Glivenko, *Théorie générale des structures*, Parigi, Hermann, 1938 e una serie di articoli di Birkhoff, Menger, Stone, Ore, MacNeille e Baer apparsi nel vol. XLIV del « Bulletin of the American Mathematical Society » (1938).

Storicamente la nozione di reticolo (*Dualgruppe*) fa la sua comparsa con Dedekind attorno al 1900 (che proprio in quell'anno ne formula un'assiomatizzazione) scaturendo inizialmente da una generalizzazione effettuata su situazioni aritmetiche, ed è immediatamente ' collaudata ' sui gruppi e gli ideali (cfr. P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Parigi, Vrin, 1976, cap. VIII: *Morphismes et structures*).

La geometria proiettiva sembra essere stata l'occasione che inaugurò il ' moderno *revival* ' della teoria dei reticoli, il che non stupisce, dal momento che quella « veniva chiamata geometria di unione e intersezione [*Geometrie des Verbindens und Schneidens*] nei vecchi manuali tedeschi » (Menger, *loc. cit.*). È infatti possibile costruire la geometria proiettiva riferendosi alle proprietà di queste operazioni, « come l'algebra numerica può essere fondata su assunzioni concernenti le operazioni di addizione e moltiplicazione » (*ibid.*). Nello scritto *Bemerkungen zur Grundlagenfragen - IV* (« Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », XXXVII, 1928), Menger aveva formulato un sistema d'assiomi definenti la struttura di reticolo su un insieme di elementi di natura arbitraria; al reticolo è associato un ordinamento (parzialmente definito) secondo l'abituale procedimento ed un funzione di ' misura ' a valori interi. Il reticolo ammette un elemento unitario (o oggetto vuoto), un elemento totale e l'operazione di ' complemento ' (definita da $a < b \Rightarrow \exists\, c$ tale che $a \cup c = b$ e $a \cap c = 0$ (oggetto vuoto)), di cui non è richiesta l'univocità.

Questa struttura ammette come interpretazione l'insieme dei sottospazi di una spazio proiettivo P (di dimensione finita): l'insieme degli elementi del reticolo preceduti nell'ordinamento dal solo 0 (' oggetti primitivi ') saranno costituiti dai punti dello spazio (Menger non manca di osservare che « con l'assegnazione del punto come oggetto primitivo viene precisata chiaramente l'antica definizione euclidea, *punto è ciò che non ha parti*! »), l'oggetto vuoto essendo costituito dallo spazio proiettivo vuoto mentre una retta sarà l'unione di due elementi distinti un piano l'unione di tre elementi distinti nessuno dei quali ' giace ' (ossia è minore) sulla retta congiungente gli altri due (ossia la loro unione) un iperpiano sarà invece un elemento che non è minore di alcun altro, eccezion fatta dell'intero spazio P (che costituisce per parte sua l'elemento totale). Birkhoff formula nel 1935 un'assiomatizzazione analoga e dimostra che ogni reticolo che la soddisfa costituisce uno cino le zone di contatto della teoria dei reticoli con la topologia.

Quest'ultima, in effetti, press'a poco contemporaneamente al fiorire

spazio proiettivo astratto (nel senso di Veblen e Young), benché — come osserva Koethe (*op. cit.*, p. 135) — « la questione del significato reticolare del teorema di Desargues (lo stesso si dica del teorema di Pascal) non ha trovato risposta ». Tornando all'articolo di Menger, la funzione di ' misura ' individua la dimensione degli elementi (lo spazio vuoto ha dimensione —1, ogni punto ha dimensione 0 ed in genere $|a| + |b| = |a \cup b| + |a \cap b|$ dove $|a|$ indica la dimensione dell'elemento a). Richiedendo l'univocità dell'operazione di ' complementare ', Menger ottiene poi un sistema d'assiomi che caratterizza l'insieme delle parti di un insieme finito arbitrario, la ' misura ' corrispondente individuando la cardinalità di un sottoinsieme.

Per quanto riguarda la teoria della misura, i postulati delle algebre di Boole ne forniscono una base completa per quanto riguarda unioni e intersezioni finite, aggiungendo l'additività della misura (se $a \cap b = \emptyset$, allora risulta $m(a \cup b) = m(a) + m(b)$, dove m indica la funzione di misura).

Definita una tale misura — per esempio sull'insieme degli intervalli della retta e le loro unioni finite — si può introdurre una m i s u r a e s t e r n a sull'intero insieme delle parti della retta ponendo

$$\bar{m}(x) = inf \sum_{1}^{n} m(a_i) \quad \text{per ogni} \quad \bigcup_{1}^{n} a_i \supseteq x$$

dove gli a_i sono intervalli o unioni finite di intervalli, mentre $x \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

Si definisce infine m i s u r a b i l e (secondo Carathéodory) ogni sottinsieme x della retta rispetto al quale valga

$$\bar{m}(x) = \bar{m}(x \cap y) + \bar{m}(x^c \cap y) \quad \text{per ogni} \quad y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$$

Risulta allora che gli insiemi misurabili costituiscono una sottoalgebra di Boole **M** di $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, rispetto a cui $\bar{m}$ è additiva.

Ammettendo unioni numerabili di intervalli e sostituendo le somme finite di misure con le serie corrispondenti nella condizione che definisce $\bar{m}$, otteniamo come insiemi misurabili gli insiemi di Lebesgue. In questo caso le strutture in gioco (operazioni infinitarie) sono σ-algebre di Boole, e gli insiemi misurabili costituiscono ancora una sotto-σ-algebra di Boole di $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Anche gli insiemi generati da unioni e intersezioni numerabili di intervalli costituiscono una sotto-σ-algebra dell'insieme delle parti della retta, e vengono detti ' insiemi di Borel '. Tutti gli insiemi di Borel costituiscono (in particolare) un'algebra di Boole **B**: omettendo da questa gli insiemi di misura nulla, si ottiene un omomorfismo **B** → **B/N**, dovuto al fatto che gli insiemi di misura nulla costituiscono un ideale di **B** (e che ogni omomorfismo di un'algebra di Boole è individuato da un quoziente rispetto a un suo ideale). Quanto abbiamo descritto si estende con facilità agli spazi euclidei n-dimensionali e, per quel che concerne la misurabilità di Carathéodory, al caso di insiemi astratti (precisando alcune condizioni su $\bar{m}$). La presa reticolare sulla teoria della misura (che non è un intervento a cose fatte: la teoria della misura n a s c e ambientata in un anello di insiemi ed è il fatto di definirvi una funzione a costituire la sua peculiarità) si ripercuote sulla teoria delle probabilità: se Ω è l'insieme dei ' campioni ' si richiederà $m(\Omega) = 1$, $m(\emptyset) = 0$.

Insiemi particolari di campioni costituiscono poi lo ' spazio degli eventi ' **E** ($\mathbf{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$), a cui apparterranno in ogni caso Ω e $\emptyset$. Lo spazio **E** è un'algebra del paradigma reticolare, aveva consolidato il suo assetto in edifici della massima generalità, quali sono per esempio il trattato di Alexandroff

(o una σ-algebra) di Boole e su di essa verrà definita la funzione di misura a valori in $[0, 1]$. Nel caso in cui Ω coincida con l'insieme dei numeri reali si sceglie di solito $\mathfrak{B}$ (famiglia degli insiemi di Borel) come spazio degli eventi. Passando alla teoria delle propabilità dipendenti (processi stocastici), dove la funzione di probabilità fa intervenire una variabile temporale, la teoria dei reticoli si mostra in grado di apportare semplificazioni notevoli: in particolare « rende possibile una dimostrazione del teorema di convergenza di Markoff in dieci righe » (Birkhoff (1938), *op. cit.*, p. 799).

Quest'ultimo intervento reticolare è consentito dall'applicabilità della teoria dei reticoli agli spazi funzionali, « che prende spunto dall'osservazione che esiste un ordine parziale naturale tra gli elementi di ogni spazio di funzioni reali significativo » (*ibid.*), ordine che si conserva nelle traslazioni e nelle moltiplicazioni scalari positive, il che porta alla formulazione del concetto di ' reticolo di vettori ' (cfr. Birkhoff, *Lattice Theory*, cap. XV).

Le applicazioni alla logica risalgono ovviamente a Boole, sennonché il principio secondo cui sussiste un isomorfismo duale tra l'algebra delle classi e quella degli attributi (che « consente l'andirivieni tra il mondo soggettivo della mente (attributi) e quello oggettivo della materia » (*ibid.*, p. 189)), sembra portatore dei noti paradossi. Per altro, indebolendo proprietà dell'ordinamento (sostituendo per esempio $(x^c)^c = x$ con $(x^c)^c \leqq x$), si raggiungono reticolarmente logiche diverse (intuizionista, modale).

Dulcis in fundo, Birkhoff e Von Neumann (*The logic of quantum mechanics*, « Annals of Mathematics », XXXVII, 1936) scovano un modello per la meccanica quantistica: ogni stato del sistema essendo rappresentato da un punto dello spazio di Hilbert complesso, sotto l'ipotesi che ogni sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert corrisponde a un ' attributo osservabile ', otteniamo che la logica della meccanica quantistica costituisce un reticolo modulare ortocomplementato (ossia un reticolo modulare su cui è definito un automorfismo (duale) $(\ )^c$, che soddisfa alle proprietà $((x)^c)^c = x$, $x \cap (x)^c = \emptyset$, $x \cup (x)^c =$ l'intero spazio). Scompare la legge della distributività

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\bigvee_{j=1}^{r} x_{j,i}\Big) = \bigvee_{\Psi} \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} x_{\psi(i),i}\Big) \quad \text{(e la duale)}$$

(dove Ψ è l'insieme di tutte le funzioni che fanno corrispondere ad ogni $k = 1, \dots, n$ un unico $h = \psi(k) = 1, \dots, r$) che rappresenta la generalizzazione (al finito) della nota legge distributiva

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

La legge distributiva è soddisfatta dagli attributi osservabili simultaneamente, ma non da altri.

La conclusione di Birkhoff (*op. cit.*, 1938, p. 797) è allora che, per quanto riguarda la caratterizzazione reticolare delle logiche, essa rappresenta « il luogo opportuno per dare risalto al fatto che non tutta la logica è algebra di Boole; essa non può venir insegnata come branca della teoria dei reticoli. Tuttavia neppure il programma di Erlangen di Felix Klein riduceva la geometria allo stato di branca della teoria dei gruppi. La teoria dei reticoli è allora simile alla teoria dei gruppi, in quanto fornisce alcune tra le idee direttive delle diverse regioni della matematica alle quali è applicata, *ma non tutte* ».

e Hopf del 1935[47] o quello di Fréchet del '28[48]. La topologia sembrava in possesso di un'architettura perfettamente trasparente nella sua configurazione fondamentale ed ispezionata in modo adeguato: pertanto, almeno a prima vista, non bisognosa di una visuale di sintesi, quale quella che il linguaggio reticolare si proponeva di costituire sul complesso delle algebre astratte.

Sennonché, soprattutto secondo le vedute di Fréchet (che significativamente sottotitola la sua opera sugli spazi astratti ' introduzione all'analisi generale '), la generalità alla quale cosí si giunge può essere considerata, regredendo sino alla sua forma piú semplice, come la ' descrizione ' di un oggetto matematico astratto (spazio astratto, l'entità piú generale che si presti a considerazioni topologiche) ' alternativa ', in certo senso, alla definizione di Birkhoff di algebra astratta, per quanto quest'ultima (nell'accezione incontrata nel § 1) sia in grado, come vedremo, di sussumere alcune operazioni topologiche. Ma, preliminarmente, è necessario spendere almeno qualche parola sul testo di Fréchet di cui abbiamo fatto menzione, che percorre una prospettiva di generalità parallela a quella delle algebre astratte in via d'assestamento: parallela, piú che alternativa, dal momento che l'indagine a cui gli spazi astratti si offrono è costituita dalle loro ' proprietà infinitesimali '.

Abbiamo esaminato nel capitolo precedente le idee di Fréchet sulla generalizzazione: qui si tratterà di considerarle ' in azione '.

Fréchet caratterizza l'analisi generale come « lo studio delle relazioni tra due elementi di natura qualsiasi » (di cui uno assumerà il ruolo di ' variabile ', l'altro di ' funzione '), distinguendola dal calcolo funzionale propriamente detto (inteso come sviluppo formale del-

[47] P. Alexandroff - H. Hopf, *Topologie*, vol. I, Berlino, Springer, 1935. La topologia è caratterizzata nei seguenti termini: « La topologia è la geometria della continuità (*Stetigkeitsgeometrie*): essa tratta di quelle proprietà delle forme geometriche che sono conservate attraverso applicazioni ' topologiche ' (cioè biunivoche e continue in ambedue le direzioni) e anche di proprietà che non hanno a fare con rapporti di grandezza, ed infine delle stesse applicazioni continue ».

[48] M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Parigi, Gauthier-Villars, 1928.

La prima definizione di spazio topologico è dovuta ad Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsia, 1914), ma essa non individua « né il piú generale, né il piú semplice degli spazi che si prestano alle considerazioni topologiche » (Fréchet, *op. cit.*, pp. 167-168, in nota), ma un caso particolare di spazi piú generali (come gli spazi T_0 o T_1).

le proprietà operatorie), ed anche dall' a n a l i s i f u n z i o n a l e, perché mentre quest'ultima si occupa di ' funzionali ' che hanno come variabili delle funzioni, l'analisi generale non fa intervenire considerazioni di sorta sulla natura della variabile, mirando appunto alla visuale della generalità: eliminazione delle particolarità della teoria delle funzioni e dell'analisi funzionale, e loro unificazione ' in astratto '. L'edificio da costruire verrà allora determinato da due costituenti fondamentali: l'analogia (referente astratto delle definizioni dell'analisi classica) e la generalizzazione (versione ' astratta ' dei risultati che sono patrimonio dell'analisi ottenuta per mezzo delle nuove definizioni). In questo modo, mentre ordinariamente si poggia su una definizione per conseguire la dimostrazione di certe proprietà che inizialmente si intravedono soltanto, l'analisi generale capovolge *la démarche de l'esprit*: saranno le definizioni, in questo caso, a doversi adattare alle proprietà che la generalizzazione è chiamata a esprimere.

L' ' approssimazione analogica ' percorre l'intero testo (benché altrove [49] Fréchet si fosse preoccupato di prendere le distanze da un *esprit de généralisation systématique* (ossia gratuito), mettendo in chiaro che la nozione di f u n z i o n a l e non è il prodotto di un « sogno generalizzante », giacché i suoi esempi « risalgono alle origini della civilizzazione »). Cosí, in una nota successiva [50], leggiamo che l'atteggiamento dei matematici è conforme alla massima: « diffidare dell'intuizione nelle dimostrazioni, affidarsi ad essa (non alla logica) per individuare la direzione da dare alle ricerche », mentre vari luoghi del testo saranno dedicati alla ricerca del sostituto conveniente dell'insieme limitato sulla retta nei vari spazi che Fréchet viene definendo. In questo percorso le proprietà riferite ai territori già conquistati dell'analisi verranno spogliate dai riferimenti ai loro luoghi di formulazione, spesso smontate e ricombinate sotto un altro aspetto, e sarà il loro gioco d'incastro a dar vita alle nuove entità, i diversi spazi astratti. A riprova della non gratuità della veduta d'insieme che essi propongono, non soltanto quanto alla loro motivazione ma anche ai risultati, Fréchet adduce la circostanza che nell'analisi generale è possibile formulare problemi la cui soluzione

[49] M. Fréchet, *L'analyse générale et les ensembles abstraits*, « Revue de Mètaphysique et de Morale », XXXII, 1925 (riprodotto anche in M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, cit.). Le citazioni si riferiscono alle pp. 8-9. Fréchet utilizza questo articolo, con alcune modifiche, come introduzione a *Les espaces abstraites*: cfr. la successiva nota 53.

[50] *Les espaces abstraits*, p. 25 (in nota).

non potrebbe presentarsi nell'analisi classica, perché quei problemi « si riferiscono a *situazioni che non possono presentarsi* nel caso corrispondente dell'analisi classica »[51]; detto altrimenti, al principio euristico di E. H. Moore[52] secondo cui « l'esistenza di analogie tra i tratti principali di teorie diverse implica l'esistenza di una teoria generale » che le unifichi, si devono aggiungere in chiosa le parole di Laplace: « L'accostamento dei metodi serve a chiarirli mutualmente e ciò che hanno in comune nella maggior parte dei casi contiene la loro vera metafisica »[53].

S'è detto che l'interesse che uno spazio astratto deve presentare consiste nelle sue proprietà infinitesimali: queste, intuitivamente, sembrano radunarsi attorno all'idea di vicinanza, variazione di una funzione quando gli elementi che costituiscono la variabile si mantengono in prossimità di un elemento determinato. La topologia dovrà far pulizia all'interno di questo nucleo intuitivo (senza far entrare in gioco la natura della variabile) esaminando fino a dove, nel territorio della generalità, esso sopravvive, fino a dove, matematicamente, è lecito trasportarlo. La via d'accesso all'astratto ci è fornita dalla considerazione (inizialmente, ancora una volta, intuitiva) delle dimensioni di un insieme. Come è noto, i risultati di Cantor avevano stabilito l'eguaglianza tra le cardinalità di insiemi di ' dimensione ' differente (retta e piano, in particolare): questo fatto evidenzia l'impossibilità di caratterizzare uno spazio astratto come semplice insieme astratto e di adottare come

[51] *Ibid.*, p. 16.

[52] Citato da Fréchet a p. 16 come uno dei « principî della generalizzazione ». A Moore si deve una *Introduction to a form of general analysis* (New Haven, Yale University Press, 1910), in cui egli formula appunto tale principio. L'analisi generale che delinea si rifà ad alcune idee di Fréchet sulla generalizzazione della nozione di elemento limite su un insieme astratto e viene definita come la « teoria del sistema di classi di funzioni, di operazioni funzionali ecc. che coinvolgono almeno una variabile generale su un insieme generale », dove « *generale* significa *vero in generale,* comprendente ogni caso particolare ben definito di variabile e insieme ».

[53] Citato da Fréchet a p. 18, *op. cit.*, spaziatura nostra. A dispetto del titolo della rivista questa citazione non compare nell'articolo del 1925, citato in precedenza. Forse l'omissione è casuale. Se non lo fosse (dal momento che la differenza tra i due scritti consiste essenzialmente nella loro funzione, il secondo introducendo in un edificio generale ormai compiuto), la successiva inserzione potrebbe essere indicativa del fatto che, nelle pagine che seguono, si toccherà con mano la vera metafisica dell'ambiente infinitesimale?

corrispondenza tra spazi astratti la semplice applicazione tra elementi degli insiemi [54].

Ora, ciò che è in grado di garantire l'uguaglianza tra le ' dimensioni ' di due spazi è una corrispondenza biunivoca tra i rispettivi elementi, unitamente alla continuità dell'applicazione in ambedue le direzioni; ritroviamo in questo modo, motivata sul concreto, la persistenza della nozione di prossimità (continuità) che la topologia dovrà formulare in modo preciso e generalizzare ' oculatamente ': quello che fin d'adesso par chiaro è che la nozione di spazio astratto non sarà sufficientemente caratterizzata dall'assegnamento dell'insieme dei suoi punti, dal momento che la topologia si prefigura come disposizione d'ambiente e non di elementi. Questo insieme dovrà pertanto essere in qualche modo ' organizzato ': nel caso piú generale uno spazio astratto consisterà in una coppia (X, k), dove X rappresenta un insieme astratto e k è una funzione definita sul suo insieme delle parti che associa ad ogni sottoinsieme $\bar{H}$ di X il suo ' derivato ' $H' = k(\bar{H})$. Questo oggetto appare il piú rarefatto in grado di offrire presa a considerazioni topologiche, e rappresenta in questo senso l'analogo di un'algebra astratta (ove l'organizzazione dell'insieme sostegno era introdotta dagli ' operatori ').

Il percorso di generalizzazione che Fréchet si configura allora come una dissezione nel complesso di proprietà che caratterizzano la topologia della retta e dello spazio euclideo, per ricomporre poi queste condizioni smembrate in termini via via piú generali, che si attaglino in prima istanza alle proprietà degli spazi funzionali conosciuti. Cosí passeremo dagli spazi metrici (spazi dove è definita una funzione ' distanza ' per ogni coppia di punti a valori reali non negativi) [55] agli spazi di convergenza, dove è presupposta la possibilità di determinare quali tra le successioni infinite di punti dello spazio convergano e quale limite venga

[54] In un articolo del 1910 (*Les dimensions d'un ensemble abstrait*, « Mathematische Annalen », LXVIII), Fréchet esprimeva la situazione in questi termini: « Bisognava cercare d'istituire *un raffronto meno grossolano degli insiemi* », ambientato ancora negli insiemi astratti ma in grado di fornire una generalizzazione soddisfacente dell'idea di dimensione. La soluzione del problema è quella che riferiamo nel testo.

[55] Una distanza δ è una funzione a valori non negativi definita sul prodotto cartesiano dello spazio e tale che: 1) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$; 2) $\delta(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$; 3) $\delta(x, y) \leqq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ (quali che siano i punti x, y, z dello spazio in questione).

loro associato [56]: questa prima generalizzazione s'impone, dal momento che se è vero che ad ogni insieme è possibile associare una ' distanza ' (per esempio la funzione caratteristica dei suoi sottinsiemi) non accade sempre che una caratterizzazione preliminare della convergenza sia esprimibile in termini di distanza, pure in esempi non patologici di spazi funzionali, attraverso il criterio

$$\{x_i\} \rightarrow x_o \text{ se e solo se } \delta(x_i, x_o) \rightarrow x_o$$

dove $\{x_i\}$ è una successione infinita di punti distinti dello spazio e $\delta(a, b)$ è la distanza tra i due punti a, b.

La nozione di convergenza per successioni induce per parte sua quella di ' punto di accumulazione ': x_0 è punto di accumulazione per un sottoinsieme dello spazio se esiste una successione di elementi del sottoinsieme (distinti tra loro) che converge al punto x_0. Tuttavia può darsi il caso in cui i punti di accumulazione mantengano significato e utilità anche quando non sia definita la nozione di convergenza. Arriviamo cosí all'individuazione dello spazio topologico (o ' spazio astratto '): è uno spazio dotato dell'operazione di derivazione, ad ogni sottoinsieme essendo associati i suoi punti di accumulazione. Se le componenti in gioco son del tutto arbitrarie (l'unica condizione essendo che se x è di accumulazione per E allora lo sarà anche per $E - \{x\}$ [57]) andrà comunque salvaguardata — precisa Fréchet — l'idea intuitiva che la sorregge (l'essere ' infinitamente prossimo '), pena la perdita d'ogni interesse della definizione. In effetti questo oggetto minimo, ottenuto dall'astrazione piú spinta, presenta un numero assai povero di proprietà e le generalizzazioni che da esso sono ottenibili comportano una praticabilità poco soddisfacente. Cosí, come in un *coup de théâtre*, Fréchet abbandona il seminato della generalizzazione, o meglio lo ripercorre a ritroso: perché il paesaggio si semplifica limitandosi agli spazi di intorni. Dalla discesa verso l'astratto, la risalita verso l'adeguato si fermerà a questo livello: uno spazio d'intorni è uno spazio che permette la caratterizzazione esaustiva dei suoi punti di accumulazione attraverso una fa-

[56] Oltre a ciò si richiede: 1) che il limite sia unico; 2) che una successione costituita da un unico elemento converga a questo elemento; 3) che ogni sottosuccessione di una successione convergente converga al suo stesso limite. Le ultime due condizioni caratterizzavano gli spazi L, definiti da Fréchet nell'articolo del 1910 citato alla nota 54.

[57] Ovvero che l'essere ' infinitamente prossimo ' dipenda unicamente dall' ambiente circostante.

miglia non vuota di sottoinsiemi convenientemente scelti ed associati a ogni singolo punto dello spazio (che vengono detti ' intorni ' del punto in questione).

Il criterio di associazione punti di accumulazione-intorni è allora il seguente: per ogni punto x dello spazio e per ogni suo sottoinsieme E, x è di accumulazione per E se e solo se $\forall U_x$ (intorno di x) $\emptyset \neq U_x \cap E \neq \{x\}$ (in altre parole se ogni intorno del punto ha in comune con l'insieme E almeno un elemento distinto dal punto dato [58]).

Un'applicazione continua tra due sottoinsiemi E, F di due spazi di intorni è allora una corrispondenza univoca $f : E \rightarrow F$ tale che, se $f(a) = b$, allora per ogni intorno U_b esiste un intorno corrispondente V_a per il quale risulti $f(V_a \cap E) \subset U_b$.

Siamo allora in grado di affrontare convenientemente il confronto tra dimensioni di spazi, problema da cui eravamo partiti, definendo omeomorfismo una corrispondenza biunivoca e bicontinua (nel senso appena precisato), tra due spazi di intorni nel linguaggio particolarmente sempre che la generalizzazione è venuta conquistando. Da qui si formuleranno le definizioni di ' insieme chiuso ' e ' aperto ', e su questo livello potrà svolgersi la teoria degli spazi topologici. Tralasciando le ' generalizzazioni intermedie ' (spazi di Hausdorff, di Riesz ecc.) che Fréchet non manca di esaminare, possiamo concludere a questo punto la descrizione riassuntiva di questo edificio della generalità.

Come e con quali motivazioni, allora, la teoria dei reticoli può accostarvisi? Come entrata occasionale possiamo assumere la definizione di Birkhoff di algebra astratta: questa, in effetti, conteneva piú di quanto Birkhoff usasse realmente nei suoi lavori del 1933-1935. In verità, in nota all'articolo del '33, Birkhoff dichiarava che la sua definizione includeva « la topologia di Fréchet, l'operazione essendo costituita dal punto limite di una successione » [59] (riferendosi dunque a quello che sopra abbiamo chiamato ' spazio di convergenza '). Anche l'articolo del '35 si limitava a brevi cenni (possibilità di introdurre il

[58] Con l'assegnazione di un sistema d'intorni siamo dunque in grado di definire un'operazione di derivazione. Viceversa, dato uno spazio topologico (X, k), dove l'operazione di derivazione soddisfi alla condizione di non essere decrescente (ossia $E \supset F \rightarrow k(E) \supseteq k(F)$), è possibile definire una famiglia di intorni coordinando ad ogni punto la collezione degli insiemi rispetto ai quali il punto risulta interno (chiamando ' interno ' rispetto a E ogni punto p che non sia d'accumulazione per punti non appartenenti ad E).

[59] Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, cit., p. 441.

limite attraverso unioni e intersezioni infinite e compatibilità della struttura topologica con le operazioni gruppali). È piuttosto in un suo articolo del 1936 che incontriamo una prima intromissione reticolare in topologia [60]: il problema che Birkhoff affronta è l'ordinabilità (in termini di caratterizzazione reticolare) delle diverse strutture 'topologiche' associate a un insieme. La via d'accesso a una tale descrizione è dunque riassunta nella domanda: esiste una topologia che 'includa' le topologie di una data classe che sia il loro 'minimo maggiorante', ed una topologia che ne sia inclusa e che funzioni come massimo minorante, e se sí come costruirle?

In altre parole: le strutture topologiche (di un determinato tipo) definite su un insieme sono o no predisposte a una descrizione reticolare?

La risposta è affermativa. Un primo approccio si rivolge alle funzioni di distanza, definite dalle proprietà:

$$\delta(x,x)=0;\ \delta(x,y)\geqq 0;$$
$$\delta(x,y)+\delta(y,z)\geqq\delta(z,x)$$

quali che siano i punti x, y, z appartenenti all'insieme su cui è definita la distanza [61]. Se si introduce una nozione di inclusione tra due distanze definite su uno stesso insieme nel modo seguente

$$\delta_1 \supset \delta_2 :=\forall x,y \quad \delta_1(x,y)\geqq\delta_2(x,y)$$

otteniamo anche il risultato

$$\forall \delta_1,\delta_2\ \exists\,\bar\delta=\delta_1\cup\delta_2$$

minima distanza che includa, nel senso appena definito, le prime due, definita da $\bar\delta(x,y)=max\{\delta_1(x,y),\delta_2(x,y\}$. È assicurata anche l'esistenza di un estremo inferiore.

$$\hat\delta=\delta_1\cap\delta_2 \text{ (massima distanza inclusa dalle prime due)}$$

e ne è esibita la costruzione esplicita [62], come nel primo caso.

[60] G. Birkhoff, *On the combination of topologies*, « Fundamenta Mathematicae », XXVI (1936).

[61] La riflessività è conseguenza delle assunzioni precedenti, mentre la condizione 1) riportata nella nota 55 è in questo caso omessa.

[62] Meno semplice della precedente, essa risulta definita da

Dal momento che queste introduzioni di unione e intersezione rispettano le ordinarie proprietà richieste, se ne conclude che l'insieme delle distanze definibili su un qualsiasi ' spazio astratto ' costituiscono un reticolo[63].

Se ora consideriamo gli spazi di convergenza (dove è richiesta unicamente l'esistenza di una ' legge ' τ che distingua le successioni infinite di punti dello spazio convergenti da quelle che non lo sono e che associ ad ogni successione convergente il suo punto limite: $\tau\{x_n\} = lim\{x_n\}$), otteniamo risultati analoghi.

Dal momento che è possibile considerare una definizione della convergenza τ come relazione tra $\{S\}$, insieme delle successioni di punti dell'insieme sostegno S (lo spazio), e S stesso, risulta naturale definire l'inclusione

$$\tau' \subset \tau \subset \{S\} \times S : = \tau'\{x_n\} = x \quad \text{implica} \quad \tau\{x_n\} = x$$

quale che sia la successione $\{x_n\}$ convergente secondo la topologia τ'.

Anche in questo caso si ottiene un reticolo: il reticolo delle convergenze definibili su un dato spazio, rispetto alle operazioni

$\hat{\tau} = \cap\ \{\tau_k\} =$ massima topologia contenuta in ogni topologia della famiglia $\{\tau_k\}$, dove si definisce $\hat{\tau}\{x_n\} = x \Leftrightarrow \forall\, \tau_i \in \{\tau_k\} \quad \tau_i\{x_n\} = x$

$\tilde{\tau} = \cup\ \{\tau_k\} =$ minima topologia contenente ogni membro della famiglia $\{\tau_k\}$, dove si definisce $\tilde{\tau}\{x_n\} = x \Leftrightarrow \exists\, \tau_j \in \{\tau_k\}$ tale che $\tau_j\{x_n\} = x$.

Mentre la topologia-intersezione (che induce ovviamente un'operazione binaria tra le topologie della famiglia $\{\tau_k\}$, e in generale su quelle definibili su un dato spazio) conserva importanti proprietà delle componenti su cui agisce, l'unione ha disgraziatamente una presa soltanto parziale, a dispetto della dualità che le due operazioni pre-

$$\delta(x, y) = \inf_{\substack{x_0 = x \\ x_n = y}} \sum_{1}^{n} \min\{\delta_1(x_{i-1}, x_i), \delta_2(x_{i-1}, x_i)\}$$

(tutte le ' poligonali ' possibili che congiungono i due punti x e y, i cui lati vengono ' misurati ' dal minore dei valori assunti dalle due distanze δ_1, δ_2).

[63] Se consideriamo come distanza quella definita dalle condizioni della nota 55, questo risultato non è piú valido, perché la classe in questione è ancora chiusa rispetto all'unione, ma non all'intersezione.

sentano in ambito reticolare: per esempio, se la famiglia $\{\tau_k\}$ è formata da topologie di convergenza per le quali il limite è unico, ogni sottosuccessione di una successione convergente è ancora convergente e conserva il limite della prima, ogni successione costante è convergente ed ha come limite la costante in questione, la topologia-intersezione è dotata anch'essa di queste proprietà, mentre nella topologia unione non è in generale assicurata la prima [64]. Poiché a livello reticolare una simile disparità non ha ragione di sussistere, o la definizione delle operazioni non è la migliore possibile, oppure è il territorio che si sta perlustrando che in effetti presenta asperità e asimmetrie.

Passando poi alle topologie ' di chiusura ', ' di Riesz ' e ' di Hausdorff ' [65] otteniamo altrettanti reticoli, salvo nel caso degli spazi di Hausdorff sulla famiglia dei quali è assicurata la chiusura della sola unione.

Infine Birkhoff stabilisce un tramite tra le topologie ' di chiusura ' (dove è assegnata la famiglia dei sottoinsiemi chiusi) e le topologie di convergenza in termini che oggi diremmo funtoriali: la corrispondenza sui rispettivi reticoli inverte l'ordine [66].

[64] Nondimeno Birkhoff osserva che le sole ultime due condizioni sono in grado di individuare una classe importante di spazi topologici, gli spazi L come originariamente definti da Fréchet (cfr. la nota 56). Ma il loro aggiornamento del 1928 richiederà, appunto, l'unicità del limite.

[65] Una topologia di chiusura su uno spazio metrico S è assegnato dalla selezione dei suoi sottoinsiemi chiusi C, soddisfacenti alle condizioni: l'unione di due chiusi è un chiuso, l'intersezione di un numero qualsiasi di chiusi è un chiuso e inoltre $\inf_{y \in C} \delta(x, y) = 0 \Rightarrow y \in C$.

Le sole prime due condizioni bastano a determinare una topologia di chiusura Θ su uno spazio qualsiasi X con l'assegnamento di una famiglia di sottoinsiemi che le soddisfano. La relazione d'ordine che Birkhoff introduce è allora $\Theta \supset \Theta' \Leftrightarrow$ ogni chiuso rispetto a Θ' è chiuso rispetto a Θ. Si ottiene in tal modo il reticolo delle topologie di chiusura.

Infine, uno ' spazio di Riesz ' è uno spazio di chiusura nel quale l'intero spazio e ogni suo singolo punto sono chiusi, mentre uno ' spazio di Hausdorff ' è uno spazio di chiusura con la condizione aggiuntiva che, per ogni coppia di punti dello spazio, esistono due aperti (= complementari di chiusi), disgiunti, che li contengono rispettivamente.

Il reticolo delle topologie di Riesz (definibili su uno spazio) risulta sottoreticolo delle topologie di chiusura.

[66] Nell'articolo di Birkhoff in realtà il verso dell'ordinamento è conservato nella corrispondenza; ma ciò è dovuto al fatto che, dopo aver osservato che ogni ' legge di convergenza ' può esser concepita come sottoinsieme di $\{S\} \times S$, curiosamente definisce l'inclusione tra topologie di convergenza capovolgendo l'inclu-

Possiamo caratterizzare la serie di risultati cosí ottenuta affermando l'adattabilità di talune strutture topologiche a una combinatoria reticolare; ciò non toglie l'impressione che la visuale che forniscono resti, per cosí dire, all'esterno dell'edificio: la stessa corrispondenza tra reticoli che abbiamo menzionato è ottenuta (in termini di elementi) attraverso concetti puramente topologici. Se si aspettava una ricognizione in grado di gettare luce sull'oggetto topologico, questa sembrerà inevitabilmente fioca: l'organizzazione che i reticoli paiono in grado di apportare resta accessoria, ma in grado di ispezionare queste strutture internamente.

La chiave per penetrare all'interno dell'edificio, senza limitarsi a osservazioni di facciata, ci è offerta da due lavori di Marshall Stone e Henry Wallman.

Inizieremo da Wallman, benché il suo articolo segua cronologicamente quello di Stone[67]. In funzione di epigrafe (e paradigma) Wallman apre il suo scritto facendo menzione del « classico risultato della topologia » secondo cui « la teoria omologica di un poliedro geometrico è determinata dal complesso astratto associato ad ogni sua triangolazione. *Il complesso astratto è naturalmente piú semplice,*

sione che ha appena individuato, ossia dualmente a quanto abbiamo fatto a p. 175. Abbiamo preferito conservare il significato dell'inclusione tra topologie come inclusione tra relazioni: la corrispondenza tra i reticoli che Birkhoff realizza costituisce allora una connessione di Galois.

Piú da vicino, essa si configura nei termini seguenti.

Enunciamo dapprima le seguenti equivalenze:

I) $\{x_n\} \rightarrow x \Leftrightarrow$ ogni aperto a cui x appartenga contiene tutti gli x_i che compaiono in $\{x_n\}$ per ogni $i \geqq k$ (ossia almeno da un certo elemento in poi nella successione);

II) A è aperto $\Leftrightarrow$ A contiene tutti gli elementi (a partire da un certo posto in avanti) di ogni successione convergente a uno dei suoi punti.

Allora adottando I) come definizione di convergenza otteniamo una topologia di convergenza a partire da una qualsiasi topologia di chiusura Θ (soddisfacente, cioè, le condizioni formulate alla nota 65). La topologia di convergenza $T(\Theta)$ cosí ottenuta soddisfa per parte sua alle condizioni 2), 3) della nota 56.

D'altra parte assumendo II) su una topologia di convergenza τ determiniamo una topologia $\Theta(\tau)$ di chiusura.

I funtori T e Θ sono controvarianti, ossia $\Theta \supset \Theta' \Rightarrow T(\Theta) \supset T(\Theta')$; $\tau \supset \tau' \Rightarrow \Theta(\tau) \subset \Theta(\tau')$.

[67] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to the general topology*, « Transactions of the American Mathematical Society », XLI (1937); H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, « Annals of Mathematics », XXXIX (1938).

astrattamente, del poliedro ». Il dispositivo che allora si presta ad allestire verrà caratterizzato dal fatto che se « gli invarianti topologici sono *associati* agli spazi » (e pertanto costituiscono in certo senso proprietà di 'individui') « tali invarianti possono in realtà esser determinati da *strutture assiomaticamente piú semplici* degli spazi stessi ». Dal momento che queste strutture risulteranno essere reticoli associati agli spazi (dunque, ancora, loro proprietà) la sostituibilità del semplice al complesso comporterà in pari tempo la dislocazione dell' 'astratto' al ruolo di 'concreto'.

Cerchiamo allora di esaminare l'approntamento di un tale congegno. Partiamo da un reticolo distributivo $\mathfrak{R}$ con le operazioni (che per comodità scriveremo sotto forma di somma e prodotto) commutative, associative, idempotenti e soddisfacenti le relazioni (leggi distributive, appunto):

$$a(b+c) = ab + bc \qquad\qquad a + bc = (a+b)(a+c)$$

Sull'insieme delle parti di $\mathfrak{R}$ definiamo una famiglia particolare di sottoinsiemi S (detti 'collezioni massimali'), individuati dalle proprietà

(1) $\forall s_i \in S \prod_{i=1}^{n} s_i \neq 0$ (il prodotto — o 'intersezione' — di suoi elementi è diverso da zero — o 'insieme vuoto');

(2) non esiste $T \supset S$ che goda della proprietà (1).

Chiameremo allora 'punti' le collezioni massimali definite su $\mathfrak{R}$ e loro 'coordinate' gli elementi di $\mathfrak{R}$ di cui sono costituite. Ad ogni elemento $x \in \mathfrak{R}$ associamo infine l'insieme dei 'punti' (cioè delle collezioni massimali) che hanno x come loro 'coordinata': un tale insieme verrà chiamato 'x-insieme di base' e contrassegnato dal simbolo I_x. Perché la corrispondenza tra gli elementi del reticolo $\mathfrak{R}$ e i rispettivi insiemi di base risulti biunivoca è necessario e sufficiente che $\mathfrak{R}$ soddisfi la condizione (proprietà della disgiunzione): se a e b sono elementi distinti di $\mathfrak{R}$ allora in $\mathfrak{R}$ esiste anche un terzo elemento c per il quale si abbia $ac = 0$ e $bc \neq 0$.

Se denotiamo con $\cup$ e $\cap$ l'unione e l'intersezione insiemistiche, otteniamo i seguenti risultati:

$$a, b \in \mathfrak{R} \Rightarrow \mathrm{I}_a \cap \mathrm{I}_b = \mathrm{I}_{ab}, \mathrm{I}_a \cup \mathrm{I}_b = \mathrm{I}_{a+b}; \qquad ab = 0 \Rightarrow \mathrm{I}_a \cap \mathrm{I}_b = \emptyset$$

L'intersezione (finita o infinita) di insiemi-base viene allora detta 'insieme chiuso' e l'insieme $\mathfrak{S}$ dei punti sopra definiti, unitamente ai suoi insiemi chiusi, risulta essere uno spazio topologico compatto[68] di tipo T_1.

La costruzione è cosí ultimata. A questo punto possiamo assumere come reticolo distributivo $\mathfrak{R}$ quello costituito dagli insiemi chiusi di un T_1-spazio $\mathcal{T}$ per le operazioni di unione e intersezione insiemistiche. Su tale reticolo ripetiamo la procedura che abbiamo appena esaminato e indichiamo ancora con $\mathcal{S}$ il T_1-spazio cosí ottenuto.

Si mostra facilmente che la collezione di tutti gli insiemi chiusi di $\mathcal{T}$ contenenti un determinato punto $p \in \mathcal{T}$ costituiscono una collezione massimale e pertanto ad essa corrisponderà un punto di $\mathcal{S}$ (un tale punto verrà detto ' ordinario '). Viceversa, sia dato un punto $p \in \mathcal{S}$: se gli insiemi chiusi di $\mathcal{T}$ che sono ' coordinate ' del punto p hanno un punto $p \in \mathcal{T}$ in comune, allora p risulta costituito dai chiusi di $\mathcal{T}$ contenenti p (ossia p è ordinario). Se indichiamo con $\mathcal{S}_0$ l'insieme dei punti ordinari di $\mathcal{S}$, la corrispondenza tra i punti di $\mathcal{T}$ e quelli di $\mathcal{S}_0$ è biunivoca, e in piú, i due spazi risultano omeomorfi. Inoltre se $\mathcal{T}$ è compatto allora ogni punto di $\mathcal{S}$ è ordinario, ossia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$, mentre in generale $\mathcal{S}_0$ costituisce un sottospazio denso in $\mathcal{S}$. Ancora, se x è un aperto di $\mathcal{T}$ chiamiamo ' x-insieme aperto di base ' l'insieme $A_x \subset \mathcal{S}$ costituito da tutti i punti di $\mathcal{S}$ ciascuna delle cui coordinate ha intersezione non vuota con x. Se y è l'insieme chiuso di $\mathcal{T}$ complementare di x, si ottiene che il complementare di A_x in $\mathcal{S}$ è l'y-insieme base I_y e che la famiglia degli insiemi aperti di base costituisce una base ' additiva ' per gli aperti dello stesso spazio $\mathcal{S}$.

La corrispondenza tra gli aperti di $\mathcal{T}$ e gli ' aperti di base ' di $\mathcal{S}$ stabilisce allora un isomorfismo tra le coperture finite di aperti di $\mathcal{T}$ e le coperture finite di aperti di base di $\mathcal{S}$. In piú, l'omologia (nel senso di Čech[69]) di $\mathcal{T}$ è identica a quella di $\mathcal{S}$ e i due spazi hanno ' dimensio-

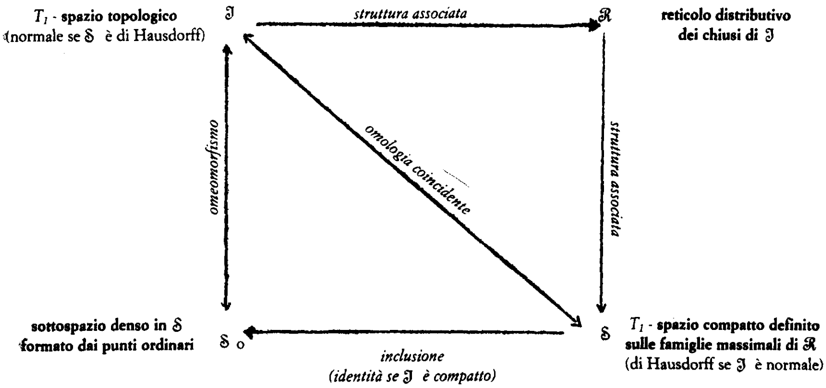
[68] Nella terminologia di Wallman (e di Stone) è ' bicompatto ', ma questa locuzione sembra caduta in disuso. In ogni caso il significato (e ciò che chiameremo ' compatto ' in seguito) è questo: da ogni copertura dello spazio (unione di aperti che coincide con esso) è possibile prelevare un numero finito di componenti che costituisca ancora una copertura dello spazio.

Uno spazio di tipo T_1 (o T_1-spazio) è uno spazio di intorni tale che per ogni coppia di suoi punti distinti esiste un intorno contenente il primo punto ma non il secondo e un altro intorno contenente il secondo ma non il primo.

[69] E. Čech, *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, « Fundamenta Mathematicae », XIX (1932).

ne ' uguale. Infine, affinché $\mathfrak{S}$ sia uno spazio di Hausdorff (dunque normale[70]) è necessario e sufficiente che $\mathfrak{T}$ sia normale.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente schema:



Pertanto Wallman può concludere che l'omologia dei T_1 — spazi è interamente determinata dal reticolo distributivo dei chiusi che è loro associato.

Questo risultato sembra dunque inserirsi nella regione epistemologica privilegiante la struttura reticolare e il meccanismo di scambio semplice-complesso non potrebbe essere piú eloquente. Ma è forse soltanto quest'ultimo ad ergersi a protagonista, la caratterizzazione reticolare divenendo semplicemente possibilità di percorso, soprattutto quando si guardi alla seconda parte dello stesso articolo, dove Wallman stabilisce risultati altrettanto significativi attraverso il concorso di una struttura (' complesso astratto moltiplicativo') differente, per certi versi piú semplice, di quella di reticolo, assumendo per cosí dire alla lettera l'esempio modello citato in precedenza.

Daremo una traccia di questa seconda costruzione. Innanzitutto qualche definizione: ad un insieme V di elementi (che diremo ' vertici ') verrà associata una famiglia di sottinsiemi finiti di vertici, detti ' simplessi '. Infine un ' complesso ' K sarà costituito da una collezione (finita o infinita) di simplessi, sui quali è formulata la sola condizione

[70] Uno spazio di chiusura è detto ' normale ' se per ogni coppia di chiusi disgiunti esistono due aperti disgiunti che li contengono rispettivamente. La stessa proprietà può essere formulata come condizione sul reticolo dei chiusi $\mathfrak{R}$: $a, b \in \mathfrak{R}$ tali che $a \cap b = \emptyset \rightarrow \exists\, c, d \in \mathfrak{R}$ tali che $c \cup d = \mathfrak{R}$ e $a \cap c = b \cap d = \emptyset$.

che ogni sottoinsieme di un simplesso appartenente a K costituisca a sua volta un simplesso di K.

Ad ogni simplesso σ (membro del complesso K) è possibile associare l'insieme dei simplessi di K che ammettono il simplesso dato come loro sottoinsieme. Questo insieme, unitamente ai sottoinsiemi dei simplessi che lo costituiscono, verrà detto 'involucro' di σ ed indicato con $\Sigma(\sigma)$. Dal momento che ogni vertice di un simplesso appartenente a K costituisce a sua volta un simplesso, siamo in grado di definire un ordinamento sui vertici, ponendo $u < v$ quando risulti $\Sigma(u) \subset \Sigma(v)$: nel caso in cui questa relazione soddisfi alla condizione

$$u < v,\ v < u \Rightarrow u = v$$

il complesso K che l'ha indotta verrà chiamato 'disgiuntivo'.

Attraverso la nozione di involucro possiamo introdurre quella di copertura di un complesso: una copertura consisterà in una collezione V di vertici tale che ogni simplesso di K risulti contenuto in $\Sigma(v)$, involucro di qualche $v \in V$.

A questo punto si può procedere alla costruzione dello spazio topologico che il complesso K è in grado di generare. Il procedimento ripercorre le tappe dell'edificazione precedentemente effettuata sul reticolo dei chiusi. I punti del nuovo spazio $\mathfrak{X}$ saranno individuati da collezioni massimali di vertici [71]. Quindi ad ogni vertice v verrà associata la famiglia dei punti contenenti v come elemento (o 'coordinata'): tale famiglia viene denominata 'v-insieme di sottobase'. Se il complesso K è disgiuntivo a vertici distinti corrisponderanno insiemi di sottobase distinti; inoltre, perché un insieme di vertici costituisca una copertura del complesso K è necessario e sufficiente che l'unione dei corrispondenti insiemi di sottobase coincida con lo spazio $\mathfrak{X}$.

La famiglia degli insiemi di sottobase individua una collezione di insiemi (ottenuti dai primi attraverso unioni finite) che costituisce un sistema di base per gli insiemi 'chiusi' di $\mathfrak{X}$, che verranno definiti come intersezione di un qualsiasi numero di insiemi, ognuno dei quali ottenuto da insiemi di sottobase attraverso unioni finite. Gli insiemi chiusi cosí introdotti soddisfano le proprietà ordinarie richieste dalla

[71] Le 'collezioni massimali' sono individuate in questo caso dalle condizioni: P (collezione non vuota di vertici) è massimale se: 1) ogni sottoinsieme di vertici appartenente a P costituisce un simplesso di K; 2) non esiste alcun Q contenente P in senso stretto che goda della proprietà 1).

topologia e lo spazio $\mathfrak{X}$ risulta essere un T_1-spazio compatto. Possiamo riepilogare la situazione nei seguenti termini: dato un complesso astratto disgiuntivo K esiste un T_1-spazio compatto $\mathfrak{X}$ ed una sua sottobase per chiusi C tale che la 'nervatura'[72] di C risulta isomorfa a K (rispetto alla struttura di 'complesso astratto')[73].

Il complesso K rappresenta dunque il momento di coagulazione astratta dello spazio topologico corrispondente, racchiuso per cosí dire nelle sole proprietà simpliciali di K, l'oggetto che è in grado di 'generarlo' e del quale abbiamo potuto constatare l'estrema semplicità di organizzazione.

Ma il risultato che esibisce la portata strategica di questa struttura (in virtú del fatto che ad ogni copertura finita di chiusi di uno spazio di Hausdorff ne corrisponde una equivalente[74] — dunque finita — costituita da chiusi ognuno dei quali può esser rappresentato come unione finita di chiusi di una sottobase) è che, se lo spazio $\mathfrak{X}$ è di Hausdorff, allora il complesso 'moltiplicativo'[75] astratto (che lo ha generato) ha omologia identica a quella dello spazio.

L'impressione che se ne ricava è dunque ancora quella della realizzabilità del trasporto di una situazione matematica in un ambiente differente e piú maneggevole. Quest'ultimo è costituito da un 'complesso astratto', struttura a prima vista piú semplice di quella di reticolo: sicché i risultati conseguiti non sarebbero — almeno in modo diretto — dominabili da una caratterizzazione reticolare. Ma se la visuale che abbiamo ottenuto di per sé si presenta trasparente, anche se fosse riconducibile a quella reticolare, perché effettuare questa tradu-

72 Si dice che C ha 'ordine finito' r se per ogni copertura dello spazio $\mathfrak{X}$ indotta da C nessun punto dello spazio può appartenere a piú di r costituenti della copertura (ed r è il piú piccolo numero intero per cui ciò si verifica). Se C ha ordine finito r, si dice n e r v a t u r a di C il complesso ogni simplesso del quale è costituito al piú di r vertici (i vertici essendo costituiti dagli insiemi di C), quando ogni insieme di C abbia elementi in comune solo con un numero finito di altri insiemi appartenenti a C.

73 Nel senso che l'applicazione tra gli elementi delle due strutture è biunivoca e conserva l'ordinamento e le proprietà di formare un simplesso e di costituire una copertura.

74 Due coperture di chiusi di uno spazio topologico si dicono 'equivalenti' se esiste una corrispondenza biunivoca tra le loro componenti che conserva la proprietà di non avere intersezione vuota tra i rispettivi membri.

75 Un complesso astratto è detto m o l t i p l i c a t i v o se per ogni suo complesso S esiste un vertice v tale che i rispettivi involucri coincidano, ossia tale che $\Sigma(S) = \Sigma(v)$.

zione? In effetti Wallman non se ne preoccupa; il suo lavoro pertanto — a dispetto del titolo — privilegia di fatto piú l'interscambiabilità teorica di fenomeni matematici (la possibilità cioè che due teorie sussumano situazioni identiche sotto discorsi differenti) che non la circostanza che il sostituto del discorso di partenza parli il linguaggio reticolare.

Nei lavori di Stone assisteremo ad un'amplificazione di questo fatto: la possibilità di connettere teorie sembra far sfumare il paradigma reticolare a titolo di territorio collegato, quando sono l'esistenza di un valico e la sua tecnica di costruzione ad assumere importanza primaria.

Poiché è costume di Stone fare le cose in grande, dovremo accostarvici attraverso tappe diverse che verranno descrivendo una vera e propria mappa di pariteticità matematiche.

Primo passo (1935)[76]: le algebre di Boole sono riconducibili alla teoria degli anelli, ed individuano tra questi tutti e soli quelli caratterizzati dalla proprietà di possedere unità (elemento neutro rispetto al prodotto) e di avere ogni elemento idempotente rispetto alle due operazioni (per ogni a risulta $a + a = a = a \cdot a$).

L'equivalenza matematica che si ottiene in tal modo tra le due strutture è assicurata dalle corrispondenze seguenti:

data un'algebra di Boole $B = \{B, \cup, \cap, (\ )^c\}$ possiamo introdurre due nuove operazioni attraverso le precedenti cosí definite:

$$a \cdot b = a \cap b \qquad a + b = (a \cap b^c) \cup (a^c \cap b) = a \Delta b$$

(differenza simmetrica);

in tal modo otteniamo un anello $\{B, \cdot, +\}$ dotato di unità e i cui elementi sono idempotenti rispetto a entrambe le operazioni. Viceversa, dato un anello di questo tipo, possiamo introdurre le nuove operazioni

$$a \cap b = a \cdot b \qquad a \cup b = a + b + a \cdot b \qquad (a)^c = a + u$$

(dove u è l'elemento neutro del prodotto, di cui si è supposta l'esistenza), ottenendo in tal modo un'algebra di Boole. Chiameremo ' anello di Boole ' un anello i cui elementi siano idempotenti rispetto alle operazioni; sebbene non per ogni anello di Boole esista un'algebra di Boole corrispondente, va tuttavia osservato che ogni anello di Boole ammette un'e-

[76] M. H. Stone, *Subsumtion of Boolean algebras under the theory of rings*, « Proceedings of the National Academy of Science of U.S.A. », XXI (1935).

stensione canonica [77] in un anello di Boole dotato di unità (e dunque corrispettivo di un'algebra di Boole).

Secondo passo (1936) [78]: teorema di rappresentazione per le algebre di Boole. I problemi di rappresentazione di una struttura astratta costituiscono un fenomeno molto significativo di ' scambio ambientale '. Possiamo caratterizzarli press'a poco in questi termini: assegnata una specie di struttura (per esempio quella di gruppo) si tratterà di individuare, se possibile, una determinata classe di modelli della struttura in modo che ogni ulteriore modello risulti isomorfo ad un membro della classe o, in altre parole, che ogni struttura astratta di quel tipo (estensionalmente: la classe di strutture ' concrete ' isomorfe tra loro) ammetta come rappresentante un modello della classe esibita. In presenza di una tale famiglia di rappresentanti, la teoria astratta della struttura in questione diviene equivalente allo studio dei modelli appartenenti alla famiglia. Il caso classico di questa situazione è rappresentato dai gruppi finiti. Questi inizialmente venivano concepiti come gruppi di sostituzione su *n* lettere; successivamente vennero formulati astrattamente (ossia assiomatizzati) e come loro modelli vennero rinvenuti oggetti distinti dagli esemplari della loro motivazione originale. Sennonché si dimostrò che ogni gruppo astratto finito può esser r a p p r e s e n t a t o da un gruppo di sostituzioni.

Nel nostro caso la struttura astratta è l'algebra di Boole, anch'essa esprimente in prima istanza « la forma astratta delle regole che governano la manipolazione di classi o di aggregati ». Il problema di rappresentazione sarà allora quello di esibire, in corrispondenza d'ogni singola algebra di Boole, un'algebra di insiemi che sia isomorfa a quella data. Benché il risultato sia analogo a quello gruppale, aggiunge Stone, la soluzione nel nostro caso è piú recondita: mentre le costituenti delle permutazioni che debbono rappresentare il gruppo astratto rimangono le stesse del gruppo in questione, gli elementi delle classi di rappresentazione per le algebre di Boole non saranno costituiti dagli elementi dell'algebra stessa ma da suoi particolari sottoinsiemi (ideali primi, passando all'ambito degli anelli); inoltre l'esistenza di questi ideali sembra riposare sull'assunzione dell'assioma della scelta.

[77] Nel senso che ogni altro anello di Boole con unità che contenga l'anello A in questione conterrà anche un anello di Boole isomorfo all'estensione canonica di A.

[78] H. H. Stone, *The theory of representations for Boolean Algebras*, « Transactions of the American Mathematical Society », XL (1936).

Detto molto in breve, la corrispondenza è assicurata dalla procedura seguente: sia A un anello di Boole, I un suo ideale arbitrario, P la classe degli ideali primi di A, P_I, la sottoclasse costituita dagli ideali primi non contenenti I. In prima approssimazione otteniamo attraverso la corrispondenza $I \rightarrow P_I$ un isomorfismo tra l'insieme degli ideali di A (con le operazioni di somme arbitrarie e prodotti finiti) e quello dei loro corrispondenti ottenuti nel modo descritto.

Restringendo poi la corrispondenza agli ideali principali $I = I(a)$ (ideali 'generali' da un elemento qualsiasi $a \in A$) e ai loro corrispondenti $P_{I(a)} = P_{(a)}$ otteniamo un isomorfismo tra la struttura $B_A = \{ \{P_{(a)}\}_{a \in A}, \cup, \cdot, \Delta\}$, che risulta essere un'algebra di insiemi (o 'anello di Boole concreto'), e l'anello A di partenza in virtú del fatto che $P_{(a)} = P_{(b)}$ se e solo se $a = b$ (esiste cioè una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'anello A e gli ideali principali da essi generati), e delle relazioni:

$$
\begin{aligned}
P_{(a+b)} &= P_{(a)} \Delta P_{(b)} \\
P_{(a \cup b)} &= P_{(a)} \cup P_{(b)} \\
P_{(a \cdot b)} &= P_{(a)} \cdot P_{(b)}
\end{aligned}
$$

Pertanto per ogni anello di Boole (astratto) esiste un'algebra degli insiemi ad esso isomorfa. Guardando alla procedura effettuata per ottenere quest'ultima possiamo osservare che è l'astratto a generare il 'concreto', o quanto meno un suo 'sostrato' esemplare.

Terzo passo (1937)[79]: « one must always topologize »[80].

La costruzione appena descritta è suscettibile di un'applicazione in topologia. Mantenendo l'identica notazione possiamo considerare P_I (insieme degli ideali primi dell'anello A non contenenti l'ideale I) e $P_{(a)}$ (insieme degli ideali primi non contenenti l'ideale principale generato da a come i n t o r n i di ogni elemento (ossia di ogni ideale primo) che contengono. I due sistemi di intorni cosí introdotti soddisfano le proprietà richieste della definizione di una topologia sull'insieme $P = P(A)$ degli ideali primi dell'anello A e risultano topologicamente equivalenti. L'insieme P risulta essere uno spazio topologico di Hausdorff 'total-

[79] H. H. Stone, *Applications ...*, cit.

[80] « Una piú profonda comprensione della struttura degli anelli di Boole è consentita dall'introduzione di concetti topologici. Un principio fondamentale della moderna ricerca matematica può venir enunciato in forma di massima: *occorre sempre topologizzare* » (Stone, *The representations of Boolean algebras*, « Bull. Am. Math. Soc. », 1938).

mente sconnesso e localmente compatto ' [81], rispetto al quale P_I e $P_{(a)}$ costituiscono rispettivamente gli aperti e gli aperti compatti [82]. D'altra parte, gli aperti compatti di un arbitrario spazio topologico di Hausdorff S totalmente sconnesso e localmente compatto costituiscono un anello di Boole: i loro ideali principali, se ' topologizzati ' come in precedenza, esibiscono uno spazio topologico omeomorfo ad S. È pertanto ragionevole chiamare gli spazi topologici di questo tipo ' spazi di Boole '.

Se chiamiamo poi ' rappresentativo ' (topologico) di un anello di Boole A ogni spazio di Boole omeomorfo alla topologia indotta da A tramite il procedimento precedente, possiamo affermare che ogni anello di Boole ha uno spazio di Boole rappresentativo e che ogni spazio di Boole è rappresentativo di qualche anello di Boole; in piú, se due anelli sono isomorfi, i loro rappresentanti topologici sono omeomorfi, e viceversa. Come prima presa sulla topologia otteniamo dunque l'equivalenza matematica delle teorie degli anelli di Boole e degli spazi di Boole, mentre il riferimento alle algebre di Boole è caratterizzato dal fatto che il rappresentante topologico di un anello di Boole dotato di unità moltiplicativa è costituito da uno spazio di Boole compatto (per altro il collegamento tra spazi di Boole e spazi di Boole compatti è assicurato da un'immersione canonica).

Ma con gli spazi di Boole a che oggetto topologico siamo di fronte? Una semplice costruzione ci condurrà a un esemplare in grado di chiarirne la natura. Se A è un arbitrario insieme di cardinalità $\mathbf{C}$ (infinita), indichiamo con X_{C} l'insieme delle funzioni caratteristiche definibili su A (per ogni $a \in A$, $\chi(a) = 1$ oppure $\chi(a) = 0$). Sia inoltre U_a l'insieme delle funzioni caratteristiche $\chi \in X_{\mathrm{C}}$ per le quali risulti $\chi(a) = 0$. Infine sia $\mathrm{A_C}$ l'insieme generato dagli insieme U_a e dai loro complementari attraverso intersezioni ed unioni finite. Assegnando ogni membro

[81] Uno spazio topologico viene detto ' compatto in un punto ' x se esiste un intorno di tale punto la cui chiusura (considerata come sottospazio) risulta compatta. È detto inoltre ' localmente compatto ' quando è compatto in ogni suo punto.
Si dice poi ' totalmente sconnesso ' uno spazio topologico tale che per ogni coppia di suoi punti (distinti) esistano due chiusi disgiunti contenenti rispettivamente i due punti e la cui unione consista nell'intero spazio.
Uno spazio totalmente sconnesso è necessariamente di Hausdorff; in questo senso il referente topologico delle algebre di Boole (quale verrà precisato in seguito) non costituisce altro che uno spazio topologico compatto totalmente sconnesso.

[82] ' Aperto compatto ' non è altro che un aperto che risulti compatto se considerato come spazio relativo.

di A_C quale intorno di ogni elemento che contiene, l'insieme X_C diviene uno spazio di Boole compatto, rappresentativo di A_C, che costituisce per parte sua un anello di Boole con unità $u = X_C$.

Ora se $\mathbf{C} = \aleph_0$ allora lo spazio X_C risulta omeomorfo al ' discontinuo di Cantor ', un insieme senza dubbio refrattario ad ogni presa intuitiva e in ogni modo ' caso limite ' o esemplare quant'altri mai singolare.

Le entità generate dagli anelli di Boole non sembrano cosí costituire un ambito di adeguata generalità, ma quella che abbiamo ottenuto non è che la prima forma di una configurazione molto piú vasta, semplice allestimento di un congegno di cui non abbiamo ancora esaminato la gittata, cosa che ci apprestiamo a compiere ora.

Se S è uno spazio topologico T_1 ed X una famiglia di suoi insiemi chiusi (non vuoti), è possibile assegnare un sistema di intorni per X assegnando

$$U_a = \{x \in X \mid x \subset a\}$$

come intorno di ogni elemento che contiene, per ogni aperto $a \subset S$. In tal modo X diviene uno spazio topologico T_0 (perché sia un T_1-spazio è necessario e sufficiente che nessun elemento della famiglia X sia contenuto propriamente in un altro elemento). Rafforzando le condizioni si ottengono i risultati seguenti: se lo spazio S è di Hausdorff e X è costituito da soli chiusi compatti oppure se lo spazio S è normale, allora la topologia associata a X come sopra definisce uno spazio di Hausdorff, il che accade anche quando i membri di X siano disgiunti.

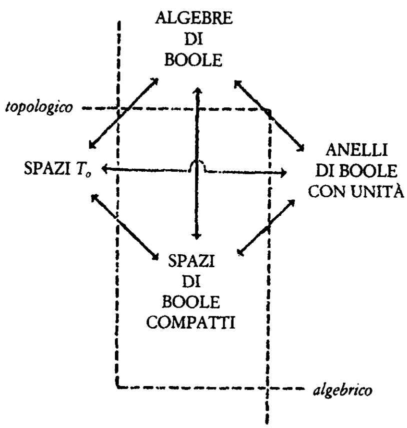
Dal momento che ogni spazio di Boole è uno spazio T_1 (benché di tipo molto particolare) questa procedura gli è applicabile e si dimostrerà significativa perché in grado di esibire il risultato fondamentale secondo cui ogni spazio topologico T_0 è raggiungibile omeomorficamente da una topologia convenientemente generata da uno spazio di Boole (secondo il procedimento descritto).

La costruzione, detta in breve, è la seguente: si parte da un T_0-spazio topologico R a cui associamo (previa caratterizzazione in termini di anelli) uno spazio di Boole, da cui selezioneremo una famiglia di chiusi su cui definire — come in precedenza — una struttura topologica rispetto alla quale i chiusi fungeranno da punto. Lo spazio cosí ottenuto risulterà omeomorfo allo spazio dato R.

Piú da vicino, i termini della questione si presentano in questo modo: sia A un sottoanello dell'anello generato dagli insiemi aperti e da quelli ovunque non densi contenuti nello spazio R, in modo che A contenga R come unità moltiplicativa e che gli interni dei suoi membri costituiscano una base per R. Sia B il rappresentante topologico di A (spazio di Boole compatto). Infine denotiamo con E_r la classe degli insiemi di A la cui chiusura non contenga il punto r di R : E_r risulta essere un ideale dell'anello A. Ma agli ideali sono associati aperti dello spazio di Boole rappresentativo, per il procedimento stesso che definisce la topologia su di esso. Sia dunque P_{E_r} l'aperto corrispondente ed X il suo complementare. La famiglia di chiusi X ottenuta in tal modo sarà quella dove definiremo un sistema di intorni secondo la procedura indicata alla pagina precedente: X diviene cosí uno spazio T_o. Risulta allora che la corrispondenza $R \rightarrow X$ (definita da $r \rightarrow X = (P_{E_r})^C$) stabilisce un omeomorfismo tra i due spazi.

Stone può concludere da qui l'equivalenza matematica della teoria degli anelli di Boole con unità e di quella degli spazi T_o; se per un verso « la struttura algebrica delle famiglie di ideali di un anello di Boole con unità è riflessa esattamente nella struttura degli spazi T_o » e pertanto le rispettive indagini presenteranno un paritario grado di complicazione, d'altra parte è possibile « disporre lo studio dei T_o-spazi su basi puramente combinatoriali, dal momento che ogni spazio di questo tipo è descritto come una *configurazione di ideali* in un anello di Boole » [83].

Alla pagina seguente forniamo una veduta d'insieme riassuntiva degli intrecci fra teorie che abbiamo descritto. Data poi la transitività delle equivalenze matematiche, possiamo completarne il contorno, evincendo le pariteticità piú generali



[83] M. H. STONE, *The theory of representations* ..., cit., p. 407.

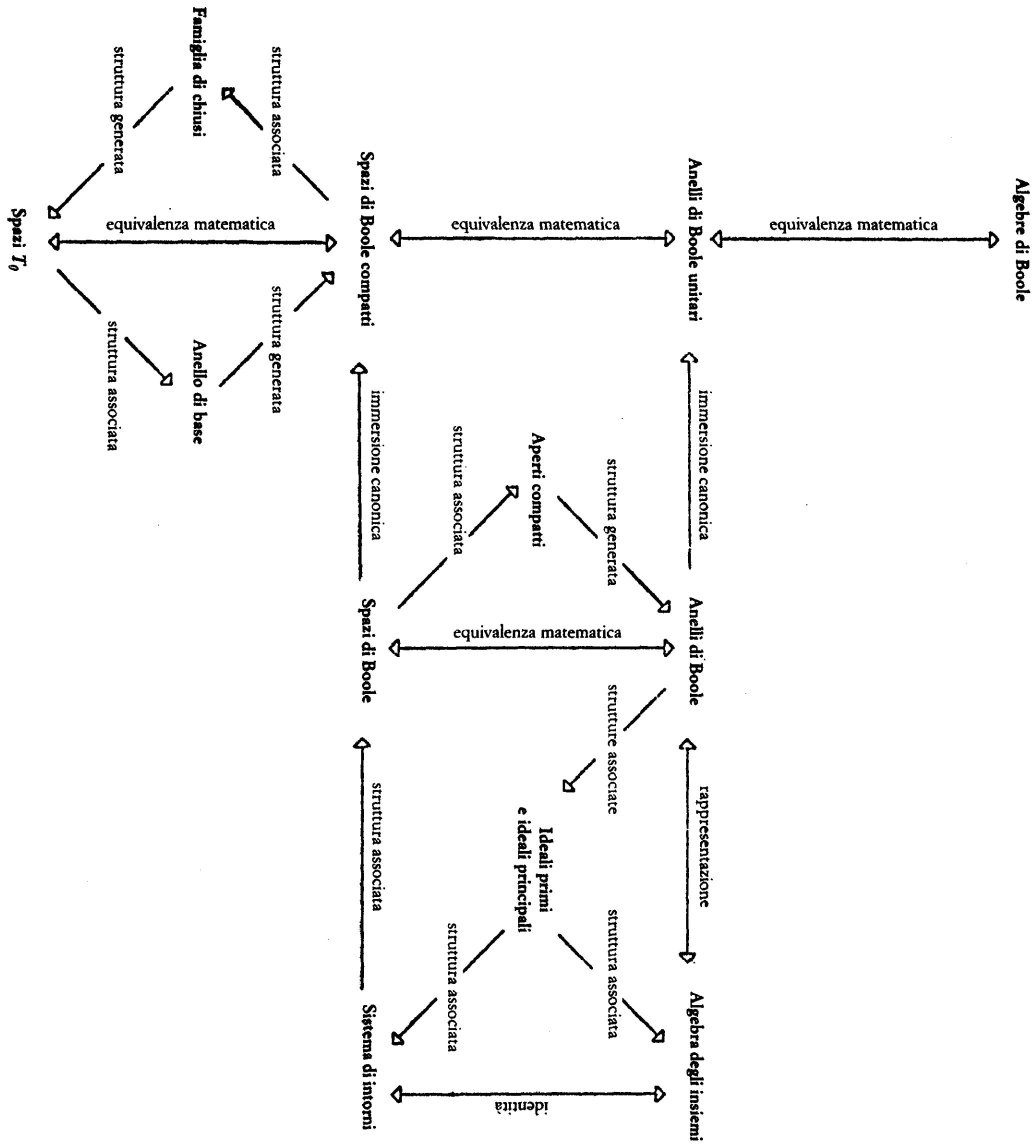
dove lo sconfinamento dalle rispettive regioni d'origine è assicurato, come s'è visto, dalle possibilità combinatoriali che ognuna di tali strutture contiene in sé e che permettono loro di raggiungere le rimanenti attraverso un itinerario praticabile e descrivente non una semplice zona d'influenza, ma un vero e proprio meccanismo d'interscambiabilità differente dalla semplice relazione generale-particolare. Quella che Stone ha effettuato è una ricognizione tra teorie tra le quali ha gettato ponti percorribili nei due sensi. Al crocevia, contingente se non altro al percorso storico che l'ha motivato, sembrerebbero installarsi le algebre di Boole, capitolo di competenza della teoria dei reticoli: questo non soltanto perché un'algebra di Boole costituisce un reticolo particolare (distributivo e complementato), ma anche per il fatto che l'accesso è assicurato da una procedura canonica a partire da ogni reticolo distributivo (struttura della quale abbiamo avuto modo di constatare la molteplicità d'intervento), in modo che la relazione intercorrente tra algebre di Boole e reticoli distributivi si presenta « analoga a quella tra dominî di integrità (anelli commutativi privi di divisori dello zero) e campi » [84]. Pertanto la collezione di risultati ottenuta da Stone apparterrebbe a tutti gli effetti alla ' fortuna ' del paradigma reticolare. D'altra parte, ispezionando piú da vicino la tecnica di costruzione delle ' equivalenze ' constatiamo come sia sempre una configurazione di anelli ad intervenire: è questa a consentire la rappresentazione delle algebre di Boole in termini di algebra degli insiemi (tant'è che si passa a una nuova struttura, piú generale, appunto quella di ' anello di Boole ') ed è ancora una disposizione di questo tipo (diremmo anzi una ' predisposizione ') ad assicurare il tramite tra spazi di Boole e T_0-spazi. Il baricentro epistemologico potrebbe allora esser dislocato altrove, ricordando che le algebre di Boole costituiscono un capitolo particolare della teoria degli anelli (grazie alla loro immediata convertibilità in anelli di Boole dotati di unità), benché occorra aggiungere che la struttura di anello di Boole è notevolmente piú semplice di quella di anello commutativo arbitrario [85].

Per altro, può sembrare ozioso azzardare delle priorità quando la relazione che si è riusciti a stabilire tra le strutture non sancisce altro

[84] M. H. Stone, *Application ...*, cit., p. 815.

[85] In particolare in un anello di Boole le nozioni di ' ideale primo ', ' ideale primario ', ' ideale privo di divisori dello zero ' coincidono.

[86] Benché non ovunque negli esempi citati.


Famiglia di chiusi
struttura generata
struttura associata
Spazi T_0
equivalenza matematica
Spazi di Boole compatti
equivalenza matematica
Anelli di Boole unitari
equivalenza matematica
Algebre di Boole
struttura associata
Anello di base
struttura generata
immersione canonica
immersione canonica
struttura associata
Aperti compatti
struttura generata
Spazi di Boole
equivalenza matematica
Anelli di Boole
strutture associate
struttura associata
rappresentazione
Ideali primi
e ideali principali
struttura associata
struttura associata
Sistema di intorni
identità
Algebra degli insiemi

che la loro equivalenza: la versione topologica degli anelli di Boole (con costrutti annessi: in una parola la loro ' topologizzazione ') non significa semplicemente la sostituibilità di una struttura con un'altra, ma si ripercuote all'indietro, fornendo — come dichiara Stone — una piú profonda cognizione della struttura stessa di anello di Boole.

Ma la semplificazione piú trasparente del paesaggio sembra demandata al futuro: con gli occhi del poi rinveniamo nell'equivalenza tra teorie nient'altro che un'equivalenza tra categorie, mentre il sentiero che le apparenta si rivela un funtore, il cammino di ritorno il suo aggiunto [86]. Piú sorprendente è il fatto che Stone, benché non in possesso di questo arsenale teorico, si preoccupi di descrivere la natura funtoriale delle costruzioni e di precisare le condizioni che individuano l'aggiunzione.

Si presenta allora un enigma retrospettivo, formulato da Mac Lane in un articolo sull'influenza di Stone sull'origine della teoria delle categorie [87]: se il contegno delle strutture è allusivo di un'analoga situazione di collegamento, questa situazione non spinge verso una tematizzazione di quest'ultimo, in grado di esplicitarne la natura e chiarirne le condizioni di applicabilità? In effetti la ' descrittiva ' categoriale (morfismi, funtori, isomorfismo naturale e categoriale) non tarderà ad emergere: l'articolo di Eilenberg-Mac Lane sugli isomorfismi naturali nei gruppi data 1942 e si configura sin dall'inizio come « resoconto preliminare », « base per un'appropriata *teoria generale* » [88], il cui allestimento ufficiale [89] seguirà di lí a tre anni (con l'intermezzo di una guerra mondiale!). La tematizzazione, insomma, non si fa attendere: quella che tarda è piuttosto l'esplicazione adeguata del concetto di aggiunzione, rivelatore di « un aspetto piú profondo della teoria delle categorie » [90], benché suoi esempi significativi fossero ben noti. Si sarebbe tentati di supporre che il paradigma reticolare (o una qualche sua versione allargata o analoga), enfatizzando il ruolo strategico degli oggetti (algebre o anelli di Boole nel nostro caso), impedisse una visuale piú ampia in cui la natura del tramite fra gli oggetti venisse configurata in generale.

Ma non sarebbe che un artificio retorico: l'indugio nella decanta-

[87] S. Mac Lane, *The influence of M. H. Stone on the Origins of Category Theory*, si trova in *Functional Analysis and Related Fields*, Springer 1970.

[88] S. Eilenberg - S. Mac Lane, *Natural isomorphisms in group theory*, « Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. », XXVIII (1942).

[89] S. Eilenberg - S. Mac Lane, *General theory of natural equivalences*, « Transactions of the American Mathematical Society », LVIII (1945).

[90] Mac Lane, *The influence ...*, cit., p. 230.

zione del concetto generale di aggiunzione si presenta piuttosto — come sembra suggerire Stone [91] — a titolo di problema puramente interno inerente allo sviluppo della teoria delle categorie e, se le situazioni note di collegamento tra teorie spingevano nella direzione [92] di una tematizzazione in ambito generale, ciò avveniva tanto nel senso di una ' descrittiva categoriale ' (che, si è visto, è presto approntata) quanto in quello, piú articolato, di una generalità che rendesse conto dei fenomeni di aggiunzione.

Secondo Mac Lane l'ostruzione, piuttosto, sarebbe stata bourbakista, nel senso che la città matematica della decade 1946-1956 non era accondiscendente ad « ulteriori sviluppi concettuali (...) forse perché si riteneva che lo schema fornito dalle strutture di Bourbaki elargisse una generalità soddisfacente » [93].

91 *Ibid.* (*Remarks of Professor Stone*), p. 237.

92 « spingevano nella direzione ... », in chiosa: occorrerebbe virgolettare spingevano, perché rinvenire regressivamente la necessità di emergere di una nozione o di una generalizzazione, al di là della contingenza della materia dove essa si esercita, non è operazione da compiersi su due righe. Per altro, la descrittiva categoriale proverebbe piú specificatamente da altri luoghi, quanto alla sua motivazione piú prossima.

93 Mac Lane, *The influence ...*, cit., p. 234.

Capitolo Terzo

VITA E OPERE DI NICOLAS BOURBAKI

> « The central dogma of structuralism is that all particularities in mathematics can be analyzed without residues into abstract structures. Mathematics is the study of abstract structures: this appears to be the view of Bourbaki. »
>
> Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*

1. - Infanzia di Bourbaki.

Tracciando il bilancio di un trentennio d'attività del gruppo di cui — per quanto ci è dato di sapere — fu uno degli artefici, Jean Dieudonné ha delineato il quadro della situazione culturale in cui maturò il progetto bourbakista [1]. Alla sua origine non sembra esservi stato altro che un'esigenza d'aggiornamento, conseguente alla condizione d'isolamento in cui venne a trovarsi la matematica francese degli anni Venti, circostanza che secondo Dieudonné è in gran parte imputabile alla mancanza di un ricambio generazionale nel periodo susseguente alla guerra, dovuta alle ingenti perdite subite dalla Francia sui campi di battaglia: in effetti, mentre i giovani scienziati francesi erano inviati al fronte, i loro coetanei tedeschi venivano impiegati nel potenziamento della macchina bellica in qualche istituto di ricerca. Ne risultò la cristallizzazione della comunità matematica francese attorno ad indagini coltivate vent'anni addietro ed una disattenzione piú o meno generale nei confronti delle ten-

[1] J. Dieudonné, *The Work of Nicholas Bourbaki*, « American Mathematical Monthly », 1970.

denze allora emergenti nel resto d'Europa. I seminari di Hadamard e Julia al Collège de France costituirono tentativi di rimediare a questo stato di disinformazione, fornendo ragguagli sui contributi recenti delle diverse scuole: venuti a contatto con tali novità (e con discipline pressoché sconosciute), animati dal proposito di sprovincializzare l'ambiente francese, i futuri bourbakisti progettarono di tradurre l'istanza dei seminari in forma di trattato che, in chiave sistematica, avrebbe dovuto render conto delle idee fondamentali della matematica ' moderna ' e, nelle intenzioni, esser portato a termine in breve tempo.

Le cose, come si sa, sarebbero andate altrimenti, l'obiettivo inizialmente perseguito (circoscritto ad una generica richiesta di rinnovamento) assumendo le proporzioni ben piú gravose di una monumentale opera di riedificazione sorretta da ambizioni di diverso accento. È bene, tuttavia, tener presente il periodo in cui l'iniziativa prese corpo, perché da esso questa ricavò la sua impronta costitutiva: l'articolo di Dieudonné indica apertamente nella *Moderne Algebra* di Van der Waerden il testo a cui il gruppo si rivolse assumendolo come modello di trattazione organica, mentre un apprezzamento di segno opposto è riservato a *Les espaces abstraits* di Fréchet in fatto di topologia generale [2]; al proposito Dieudonné lamenta la carenza di lavori sistematici che allora si riscontrava attorno ad argomenti che esulassero dalle competenze dell'algebra (che, per altro, il testo di Van der Waerden prendeva in considerazione solo parzialmente) e di cui, d'altro canto, un trattato intitolato alle ' strutture fondamentali dell'analisi ' doveva occuparsi di necessità. Non si trattava, tuttavia, semplicemente di trasferire lo ' spirito ' dell'algebra astratta in altre regioni della matematica, soprattutto non quando l'assunto generale dell'operazione acquistò la portata che oggi gli riconosciamo. Oltre alla considerevole influenza che su di loro esercitò la

[2] « Si poteva trovare della topologia generale soltanto in poche memorie ed in un libro di Fréchet che, in realtà, era la compilazione di un'enorme quantità di risultati priva d'un qualsiasi ordine » (Dieudonné, *op. cit.*, p. 137).

Riportiamo al riguardo anche questo giudizio di André Weil: « I matematici che da una trentina d'anni si sono occupati di topologia generale, hanno introdotto in questa branca della matematica un insieme completamente disordinato di nozioni e di assiomi di cui ci si può fare un'idea consultando per esempio l'indice del libro che (...) Fréchet ha pubblicato sugli spazi astratti. Fortunatamente la maggior parte di queste nozioni è priva d'ogni interesse, come l'evoluzione della scienza mostra sempre piú chiaramente » (*Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Hermann, Act. Sc. Ind. 551, Parigi 1938, p. 37). Weil fu uno dei membri fondatori del gruppo.

scuola degli algebristi tedeschi, occorre infatti tener conto di un'altra ascendenza spirituale di cui i bourbakisti ritennero di farsi carico, quella di colui che « incarnò per la generazione tra le due guerre l'ideale del matematico » [3], ossia Hilbert: invero, già a partire dagli anni immediatamente precedenti o contemporanei alla stesura dei primi fascicoli degli *Éléments*, essi prospettarono questa problematica arrogazione.

Nel riferirci agli scritti epistemologici dei membri fondatori [4] non intendiamo proporre una ricostruzione degli intenti da cui estrapolare in seguito una forma compiuta di discorso di cui abbiamo già disponibile la realizzazione effettiva, quasi che questa vi fosse contenuta in germe o che un allestimento teorico necessiti comunque d'una fondazione apologetica esprimibile nel solo linguaggio delle idee. Siamo del resto sufficientemente avvertiti al riguardo di simili ' proiezioni ' epistemologiche ed avremo anzi occasione di rilevare una certa dissonanza tra il testo formale e la sua versione promulgativa, nonostante l'approssimazione d'ogni criterio di compatibilità avanzato in proposito. Semplicemente, ciò che rende opportuno questo tipo d'esame è il risvolto ideologico assai pronunciato che il bourbakismo venne sempre piú decisamente acquisendo e da cui sarebbe difficile prescindere guardando al modo in cui il disegno complessivo portato avanti dal gruppo sarebbe stato recepito: a dispetto della sua fortuna, tuttavia, la posizione epistemologica dei bourbakisti si basa per lo piú su indicazioni di massima di cui conviene chiarire i presupposti dove l'argomentazione ci si offre nella forma piú esplicita, come è appunto il caso degli articoli delle ' origini '.

Tornando all'asseverazione bourbakista delle vedute di Hilbert, per quanto condotta conformemente ad un'interpretazione poco ortodossa, essa costituisce uno dei motivi ricorrenti di questi scritti. Il punto di vista hilbertiano vi appare come quello risolutivo della questione del rigore: con la formalizzazione delle teorie si chiude definitivamente un

[3] Cosí si esprime Dieudonné, che illustra la fascinazione hilbertiana nei termini seguenti: « si può dire che per la sua attrattiva estetica e in qualche modo morale, ben piú che per la sua utilità immediata, [la dottrina di Hilbert] ha conquistato la maggior parte dei giovani matematici » (Dieudonné, *David Hilbert (1862-1943)*, in F. Le Lionnais (editore), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Parigi, Blanchard, 1962, p. 2897; prima edizione: Marsiglia, Cahiers du Sud, 1948).

[4] Oltre ai citati Dieudonné e Weil, gli altri membri fondatori del gruppo ' sembrano ' essere stati H. Cartan, C. Chevalley e J. Delsarte; un divertito alone di mistero circonda d'altra parte la vita interna del gruppo: si veda al riguardo, oltre all'articolo di Dieudonné, anche P. Halmos, *Nicolas Bourbaki*, « Scientific American », CLXIX-5 (1957).

capitolo apertosi un secolo prima con una serie di risultati che insegnarono a diffidare dell'intuizione e che sollevarono l'interrogativo attorno allo statuto del ragionamento matematico e delle entità su cui esso verte. La concezione formalista ripristina la quiete in questo prolungato stato di disagio, rappresentando lo stadio conclusivo di un progressivo affrancamento dal ' concreto ': « ad ogni matematico che abbia a cuore la probità intellettuale s'impone ormai la necessità assoluta di presentare i propri ragionamenti in forma assiomatica » [5], ovvero in una forma in cui « si opera su parole che mediante un'operazione preliminare ci si è preoccupati di svuotare di ogni significato intuitivo » [6]. Porre assiomi significa infatti « separare perfettamente il segno dal significato, effettuando in tal modo una brusca traslazione nell'astratto dopo la quale il ragionamento propriamente detto può validamente cominciare » [7]: cosí « gli esseri [di una teoria matematica] sono definiti *ipso facto* dal sistema di assiomi che in qualche modo genera il materiale a cui si potranno applicare le proposizioni vere » [8], le quali « sono per definizione quelle che possono esser dedotte dagli assiomi mediante le regole convenzionali della logica » [9]. Allora « ogni dimostrazione deve ridursi ad una serie di trasformazioni di segni e simboli secondo regole fisse » [10].

Con la classificazione dei modi d'inferenza da considerarsi legittimi (o quanto meno con la dichiarazione esplicita di quelli a cui ci si atterrà), il problema della correttezza dimostrativa è sottratto alla condizione di provvisorietà a cui lo riduceva il ricorso all'intuizione e rimesso ad un procedimento inequivoco di controllo: l'obiettivo di « edificare interamente la matematica sulla sola logica » [11] può allora dirsi raggiunto, ben inteso quando con ciò s'intenda semplicemente che « le proposizioni

[5] Dieudonné, *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*, « Revue Scientifique », LXXVII (1939), p. 225 (salvo alcune modifiche relative alla notazione, l'articolo ricompare in *Les grands courants de la pensée mathématique*, cit., ediz. 1962).

[6] Claude Chevalley, *Rigueur et méthode axiomatique*, « Recherches Philosophiques », II (1933), p. 261.

[7] C. Chevalley e A. Dandieu, *Logique hilbertienne et psychologie*, « Revue Philosophique », I (1932), p. 106.

[8] Henri Cartan, *Sur le fondement logique des mathématiques*, « Revue Scientifique », LXXXI (1943), p. 9.

[9] Chevalley, *loc. cit.*

[10] Chevalley - Dandieu, *op. cit.*, p. 103.

[11] Cartan, *op. cit.*, p. 11.

si concatenano *in virtú delle sole regole della logica* »[12], il che tuttavia è esattamente quello che avevano sostenuto 'i peaniani' qualche decennio addietro[13]. Fin qui, in effetti, non sembrerebbe di trovarsi di fronte altro che ad una delle attestazioni di benemerenza per il metodo assiomatico quali si potevano leggere all'inizio del secolo, aggiornata tutt'al piú alla formalizzazione dell'apparato deduttivo; del resto, per controbattere gli argomenti della parte avversa, i bourbakisti riesumano le riserve che l'ambiente francese formulò nei confronti dell'assiomatica nella forma in cui quella si presentava a quel tempo: l'insistenza di questi riferimenti (ben piú frequenti di quelli all'intuizionismo propriamente detto) fa pensare ad una resa dei conti con la tradizione allo scopo di disconoscere un imbarazzante retaggio, prima ancora di suffragare l'orientamento formalista. La confutazione delle tesi dei loro predecessori appare d'altro canto piuttosto sbrigativa: su che cosa si basa, si chiedono i bourbakisti, la loro avversione nei confronti del metodo assiomatico? Sulla circostanza che ad esso non corrisponderebbe un'idea distinta degli enti su cui si lavora. Ma la pretesa realtà che si contrappone al 'valore verbale' dei suoi procedimenti non può vantare che un fondamento psicologico, dovuto cioè alla consuetudine di manipolare determinati oggetti, i soli di cui per lungo tempo la matematica si occupò[14]. Un'altra circostanza ha concorso poi a « rafforzare la credenza nel carattere di necessità di queste nozioni », quella per cui le prime assiomatizzazioni verterono su strutture univalenti, conferendo in tal modo alle entità in gioco un'individualità non riscontrabile nel caso di strutture piú generali[15].

Se l'origine della distinzione di realtà che si suole accordare alla matematica classica non consiste dunque che in una forma di autosuggestione, le prevenzioni nei confronti dell'assiomatica risultano ingiustificate e l'intuizione, pur restando (come ci si premura di sottolineare) una risorsa indispensabile alla ricerca, non sarà piú loro appannaggio esclu-

[12] Dieudonné, *op. cit.* (1939), p. 225.

[13] In effetti Peano, già nelle *Notations de logique mathématique* (1894), aveva dichiarato esaudito il sogno leibniziano di una *characteristica universalis*.

[14] Cfr. Cartan, *op. cit.*, p. 4 e Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes* (in *Compte rendu du Congrès Internationale de Philosophie des Sciences, Paris, 1949*, p. 50).

[15] Cfr. Dieudonné, *ibid.* Come si vede, in questo caso è da Hilbert che si prendono le distanze, né questo (come non tarderemo a constatare) è l'unico motivo di rimprovero che i bourbakisti ritennero di dovergli muovere.

sivo, dal momento che questa « sorta di divinazione diretta (anteriore ad ogni ragionamento) del comportamento normale che è lecito attendersi da parte degli esseri matematici che una lunga consuetudine ha reso tanto familiari quanto gli esseri del mondo reale » [16], non essendo altro che una τέχνη che si acquisisce con la pratica, sarà trasferibile nei territori piú astratti, dove potrà esercitarsi con pari fecondità. Non è evidentemente a questo che pensavano gli ' empiristi ' guardando all'intuizione come al veicolo d'intelligibilità del discorso matematico, ma è precisamente facendone una mantica che i bourbakisti possono imputare di manchevolezza nel rigore ciò che rappresentò un atteggiamento eminentemente cautelativo di fronte ai paradossi della teoria degli insiemi, del quale vengono cosí stravolti i presupposti: come strumento euristico, infatti, l'intuizione è incomunicabile e, non potendo costringere il lettore all'assenso [17], va meticolosamente circoscritta alla fase di scoperta.

Si è visto in che misura la strategia di refutazione di filosofie che in un modo o nell'altro fanno appello ad una qualche forma di evidenza privilegiata si imperni su argomentazioni di stampo psicologico e proprio alla psicologia in quanto scienza autonoma ci si rivolge talvolta affidando al suo verdetto la soluzione delle controversie epistemologiche: se « i pragmatisti e gli intuizionisti oppongono ad alcuni ragionamenti la necessità di un ritorno al concreto » [18], l'opportunità di dilucidare la natura di quest'ultimo giustifica in effetti il ricorso a questo tipo d'autorità. L'originalità delle nozioni ' vissute ' di spazio e durata nei confronti del loro corrispettivo scientifico, che comporta il declino della concezione ' fisicista ' come procedimento esplicativo predominante in psicologia, costituisce allora l'occasione di « consegnare l'insieme del-

16 N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, in *Les grands courants de la pensée mathématique*, cit., ediz. 1962, p. 42.

17 Cfr. Dieudonné, *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*, cit., p. 225.

18 Chevalley e Dandieu, *op. cit.*, p. 99. L'officio assolto in tal senso dalla psicologia viene paragonato alla funzione svolta in passato dalla teologia nel dirimere le controversie tra scienziati e filosofi: « L'eterna disputa tra pragmatisti e logicisti ristagnerebbe forse meno sterilmente se ci si rivolgesse a coloro che sembrano avere ereditato il ruolo un tempo assegnato ai teologi, ossia gli psichiatri, i sociologi e i fenomenologi. In effetti, come i teologi adducevano elementi rivelati, cioè conoscenze immediate o pretese tali, allo stesso modo costoro proclamano di fornirci il dato puro, poiché la loro autorità scientifica è fondata su descrizioni immediate o pretese tali ».

l'edificio matematico all'astratto »[19], disobbligandolo dal vincolo necessitante con la realtà esterna, o meglio con quanto si riteneva tale, dal momento che è appunto quest'idea a venir rimessa in discussione: l'assiomatica diviene cosí il compimento di un processo evolutivo contraddistinto dall'« inversione della matematica dal fisico al logico »[20]. Avremo modo di esaminare quali saranno le ripercussioni sui rapporti tra matematica e fisica dovute alla recisione di questo legame: fin d'adesso i bourbakisti sembrano professare un certo agnosticismo al riguardo, preannunciando quello che successivamente sarà il loro atteggiamento ' miracolistico ' di rinuncia volontaria ad avanzare ogni tipo di spiegazione del fenomeno[21].

Con quest'ordine di considerazioni (a cui va allegato un pragmatico criterio di fecondità contrapposto alle precauzioni adottate in nome dell'intuizione che, oltre ad essere d'impaccio allo sviluppo delle matematiche, conducono ad una mutilazione inammissibile di quelle già esistenti) si consuma dunque l'uccisione dei padri (naturali). Ma tornando a quello putativo, fino a che punto i bourbakisti sono disposti a rispettarne l'insegnamento?

Da quanto ne siamo venuti a sapere finora, la dottrina di Hilbert non consisterebbe in effetti che in una precettistica volta ad assicurare

[19] *Ibid.*, p. 102.

[20] *Ibid.*, p. 103. D'altra parte la ' logistica ' (intesa in senso lato, come lavoro di formalizzazione delle teorie) appare agli autori « un progresso tecnico suscettibile delle interpretazioni filosofiche piú disparate »: una è appunto quella di Hilbert, ai loro occhi la piú soddisfacente; un'altra è invece rappresentata dal realismo *à la* Russell, valutato negativamente a causa delle difficoltà che la concezione estensionale degli oggetti matematici solleva ed inoltre perché esso contaminerebbe il discorso matematico con presupposizioni d'ordine metafisico. Quanto a queste ultime, viene fornita una curiosa spiegazione psicologica del platonismo: « abbagliato dalla propria scoperta, il matematico che vuole filosofare prende coscienza dell'atto che l'ha condotto là, ed allora, spaventato dalla gratuità di quest'atto, cerca una legittimazione reintroducendo surrettiziamente nel mondo astratto in cui dovrà regnare qualcosa di semi-concreto assai simile ai numeri-punto [dei pitagorici], sebbene in un linguaggio piú filosofico e, per farla breve, metafisico » (p. 110). La posizione di Hilbert, viceversa, avrebbe liberato « l'attività matematica da ogni preoccupazione filosofica » (p. 111).

[21] Leggiamo per esempio nell'articolo di Cartan che « il miracolo della scienza è che si possa edificare una matematica astratta applicabile in seguito efficacemente alle leggi della natura » (*op. cit.*, p. 11). L'arcano, tuttavia, viene attenuato subito dopo osservando che « il matematico, in fin dei conti, sceglie gli assiomi che daranno luogo a una teoria efficace, sotto la guida dei fenomeni naturali » (*ibid.*): concessione, quest'ultima, piuttosto insolita in questi e nei successivi scritti dei bourbakisti.

una retta condotta del ragionamento, né avremmo gran che da aggiungere al riguardo, salvo registrare tutt'al piú un'esplicita assunzione dei rudimenti del finitismo: « non esiste pensiero chiaro se non di oggetti *determinati* ed in numero *finito sperimentale*, ossia tale che si possa effettuare l'operazione di *contarli* ». La matematica, ben inteso, resta quella di prima, redenta tuttavia dalle ambiguità connesse all'uso dell'infinito: le difficoltà che questo comportava scompaiono infatti una volta che siano stati separati il contenuto di una proposizione e la sua espressione letterale, il che costituisce appunto agli occhi dei bourbakisti il principio fondamentale della concezione hilbertiana: « l'essenziale di una proposizione è la sua *forma*, ossia *è inutile che essa evochi una rappresentazione mentale diversa dalla percezione dei segni con i quali è scritta* » [22].

Questa mondizia intellettuale, d'altra parte, appare fine a se stessa, nel senso che viene stimata bastevole all'esaurimento della questione dei fondamenti. La rilettura bourbakista dell'intera vicenda risulta esplicita al riguardo: il lavoro d'assiomatizzazione d'inizio secolo candida nei fatti la teoria degli insiemi a sostenere il peso complessivo dell'edificio matematico, ma questo riassetto spontaneo — in qualche modo immanente allo sviluppo della scienza — è intralciato dall'apparizione dei paradossi; al formalismo spetterà allora la ricomposizione della crisi [23]: fornendo, come s'è detto, un ' metodo obiettivo ' che ponga fine ad ogni contestazione possibile sulla correttezza dimostrativa, il compito di

[22] Dieudonné, *op. cit.*, pp. 228-229. Tale concezione contrassegna ai suoi occhi un progresso decisivo rispetto alle prime assiomatizzazioni che, facendo « vertere il ragionamento su esseri indeterminati ed in numero infinito », incappavano in « oscurità e incertezze ineluttabili, come ogni tentativo del pensiero che cerchi di affrancarsi dai limiti che la natura stessa dello spirito umano impone alla sua attività » (*ibid.*). L'intuizione di un'infinità di oggetti non rappresenta infatti altro che un'illusione generata dall'estrapolazione condotta su « una nozione vaga dell'esperienza », quella di « numero molto grande » (p. 227).

[23] Ecco qualche nota di colore desunta dall'articolo di Dieudonné (*op. cit.*, p. 228): « Tutto sembrava rimesso in questione; ciascuno accettava o negava, in conformità ai propri gusti, il valore dimostrativo di questa o quella parte dell'Analisi. (...) Mai la matematica aveva attraversato una simile crisi dal tempo della scoperta degli irrazionali; mai, dopo la grande *querelle* degli indivisibili, essa era stata l'occasione di un'analoga digressione metafisica. Oggi gli ultimi echi della grande battaglia si spengono a poco a poco e le questioni tanto dibattute venticinque anni orsono hanno perduto molto della loro intensità e del loro carattere inquietante. Il fatto è che, in seno a questa confusa rissa, finí per emergere un punto di vista coerente e stabile [il formalismo] a cui ha aderito a poco a poco la maggioranza dei matematici della giovane generazione ».

« fondare la matematica su basi *indiscutibili* » è evidentemente assolto, se con ciò non si pretende altro che « i termini presenti in un testo [abbiano] lo stesso senso per tutti coloro che lo leggono » [24], della qual cosa s'incarica appunto la formalizzazione.

Anche l'assiomatizzazione di Zermelo viene interpretata come un contributo in questa direzione: in essa, infatti, « la parola insieme è svuotata di ogni contenuto intuitivo », dal momento che ciò che importa sono unicamente « le regole precise a cui è sottomesso *l'uso* che della nozione si deve fare ». È allora « inutile sapere che cosa è designato da questa parola, come per Hilbert era tale la conoscenza del significato di ' punto ' o ' retta ' in geometria » [25]. Il termine di confronto ci sembra alquanto indicativo, giacché ribadisce ciò che viene ascritto a merito dell'atteggiamento formalista: « con questa concezione i famosi ' paradossi ' scompaiono da sé per la semplice ragione che il loro enunciato *non è potuto fin qui essere formalizzato* » [26] ed in fatto di ' sicurezza ' ai bourbakisti non parrà opportuno avanzare ulteriori richieste.

D'altra parte « tutta la matematica oggi esistente può esprimersi nel sistema [di Zermelo-Fraenkel]. In definitiva *una relazione, per quanto complessa ... si riduce a una relazione che non contiene altro che variabili ed è costruita* (secondo gli schemi del calcolo logico) *a partire dall'unica relazione* $\in$ » [27]. L'unificazione delle teorie matematiche attorno al linguaggio insiemistico può dirsi in tal modo legittimata; non si tratterà, a questo punto, che di realizzarla effettivamente, espletando così ciò che era apparsa una tendenza ' fisiologica ' del sa-

[24] *Ibid.*

[25] Cartan, *op. cit.*, pp. 3-4. Anche Bourbaki considera il sistema di Zermelo come prosecuzione dell'opera intrapresa da Hilbert in geometria. Dopo aver abbozzato (per bocca di Brouwer!) i capisaldi della concezione formalista, Bourbaki infatti scrive: « Per il formalista si tratta dunque di fornire la teoria degli insiemi di una base assiomatica del tutto analoga a quella della geometria elementare, in cui non ci si preoccupi di sapere quel che sono le ' cose ' chiamate ' insiemi ', né del significato della relazione $x \in y$, ma in cui si enumerino le condizioni presupposte da quest'ultima relazione », ben inteso con l'avvertenza di impedire la riapparizione dei paradossi. « Il primo esempio di un'assiomatizzazione di questo tipo venne dato da Zermelo nel 1908 » (N. Bourbaki, *Note historique* del fascicolo XXII (*Structures*) degli *Éléments de mathématique*, Parigi, Hermann, 1957, p. 103. Riedita successivamente in N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, ivi, 1960, cap. I).

[26] Dieudonné, *op. cit.*, p. 231.

[27] Cartan, *op. cit.*, p. 10.

pere: si riscriverà dunque la matematica sulla scorta di questa *characteristica universalis*.

I paradossi, allora, non son piú che un incidente di percorso e l'intera problematica dei fondamenti viene fatta sparire in una serie di accorgimenti ortografici. Palese è, in questo caso, la divergenza rispetto alla posizione hilbertiana: cosí, alla strategia volta a stabilire la non contraddittorietà della matematica, Dieudonné contrappone un'attitudine (che non esita a qualificare ' empirista ') che s'accontenta di constatarne l'assenza, facendo affidamento sulla verosimiglianza dell'ipotesi che essa seguiti a sussistere [28].

Questa disinvoltura non proviene dalla circostanza che il programma di Hilbert sia risultato inadempiente (il che la renderebbe atteggiamento rinunciatario di fronte ad un problema che si vuole non già dichiarare irrisolto, ma definitivamente archiviato), bensí discende dal proposito di estromettere l'indagine sui fondamenti dalle preoccupazioni della matematica. D'altro canto, per esser compatibile con l'adozione del formalismo quale ufficiale credo ' filosofico ' del gruppo, ciò che importa è sottolineare che « il metodo formalista e la metamatematica non sono per nulla legati l'uno all'altra in modo necessario » [29].

In effetti in tutti gli scritti che abbiamo esaminato viene prospettata la liceità di questa distinzione: se inizialmente ci si limitava ad osservare che « al di là dei problemi molto generali che la matematematica si pone » essa appare « identica al metodo ordinariamente utilizzato in matematica » [30], in seguito i toni si fanno piú perentori e la svalutazione di quella che solo qualche anno prima era potuta sembrare una

[28] Cfr. Dieudonné, *op. cit.*, p. 231: « A causa dell'origine intuitiva della matematica la verosimiglianza dell'assenza di contraddizione è assai grande, per esempio quanto quella del levarsi quotidiano del sole ». Quest'argomentazione mal si accorda con la legittimazione di una teoria formalizzata (in cui, per definizione, ogni originaria evidenza intuitiva viene sacrificata), tanto piú quando si tratti d'una teoria dimostratasi ben poco affidabile. Il fatto è che, quand'anche una nuova contraddizione venisse rintracciata, basterebbe rimescolare le carte per impedire che essa si riproduca: il contraccolpo sulla matematica, in ogni caso, non sarebbe tale da comportare « il suo dissolvimento in quanto scienza ». Dello stesso avviso è anche Weil: se « l'esperienza facesse scoprire un giorno, nei modi del ragionamento di cui facciamo uso, il germe di una contraddizione di cui oggi non ci accorgiamo, una revisione generale diverrebbe necessaria; si può tuttavia esser certi che l'essenziale della nostra scienza non ne verrebbe intaccato » (*L'avenir des mathématiques*, in *Les grands courants de la pensée mathématique*, ediz. 1962, p. 309).

[29] Dieudonné, *op. cit.*, p. 232.

[30] Cosí, in effetti, si esprimevano Chevalley e Dandieu (*op. cit.*, p. 104).

« geniale contropartita » dell'approccio formalista è condotta attraverso considerazioni che tendono a screditarla *a priori*, indipendentemente, cioè, dal fiasco delle originarie ambizioni di Hilbert [31].

Tutto ciò è conforme a quello che appare ormai chiaramente essere l'obiettivo di fondo della presa di posizione epistemologica dei bourbakisti: per loro si tratta precipuamente di rassicurare la comunità matematica, garantendone la completa autonomia di lavoro. In tal senso vanno interpretate sia la dichiarazione d'inattualità della faccenda dei fondamenti, sia l'emendazione del formalismo dal suo contrappeso giustificazionista; in testi successivi ciò è rilevabile ancor piú chiaramente: « Il matematico moderno — scrive per esempio Dieudonné — si sente perfettamente in pace con la propria coscienza, non preoccupandosi piú degli pseudo-problemi che avevano ossessionato i suoi predecessori. La logica e la teoria degli insiemi classiche, che formano la base del suo linguaggio, sono da lungo tempo sistematizzate in modo da rispondere a tutti i suoi bisogni, esorcizzando completamente i ' paradossi ' che terrorizzavano i contemporanei di Cantor » [32]; quanto alla metamatematica, al di là dei riconoscimenti di prammatica che le si concedono, essa costituisce « una scienza del tutto separata dalla matematica propriamente detta » ed « al matematico è perfettamente lecito ignorarla completamente senza esserne per nulla turbato nelle sue ricerche » [33].

Se aggiungiamo che a detta dei bourbakisti un ulteriore pregio di

[31] Cosí, per esempio, i risultati limitativi della matematica paiono a Dieudonné semplicemente sminuire la portata di un tentativo sul cui « valore filosofico » è comunque lecito « restare scettici » (*Les méthodes axiomatiques modernes*, cit., p. 232).

[32] Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes*, cit., p. 51. Cfr. anche A. Weil, *L'avenir des mathématiques*, cit.: « Abbiamo appreso a far risalire tutta la nostra scienza ad una sorgente unica, composta solo di pochi segni e di qualche regola d'uso concernente tali segni: un cantuccio senza dubbio inespugnabile, nel quale non potremmo rintanarci se non a rischio di carestia, ma verso cui ci sarà sempre lecito ripiegare in caso d'incertezza o di pericolo esterno » (p. 309, spaziatura nostra). Quale tipo di pericolo questo sia, ce lo spiega Dieudonné: stando alla sua testimonianza, Weil soleva paragonare la situazione dei matematici a quella dei primi coloni americani. « Per noi — diceva — gli Indiani rappresentano i logici o i filosofi che ci infastidiscono con le antinomie. Quando iniziano le loro incursioni ci si trincera dietro la palizzata, cioè dietro il sistema formale, e si dice: " ecco il sistema formale, considerate se tutto ciò è perfettamente corretto, cercate di non annoiarci ". Ed effettivamente essi non superano la palizzata » (J. Dieudonné, *Logica e Matematica nel 1980*, in *La nuova ragione*, a cura di P. Rossi, Bologna, Scientia/Il Mulino, 1981, p. 19).

[33] Dieudonné, *L'axiomatique dans les mathématiques modernes*, cit., p. 52.

questa versione purgata del formalismo è quello di porre al riparo la matematica da ogni recriminazione di origine filosofica [34], il quadro della situazione è completo: affrancata dall'assillo dei fondamenti, dalle pretese dell'intuizionismo, dal vincolo col mondo esterno e dall'assoggettamento alla fisica, la matematica è infine disponibile ad esser coltivata in tutta serenità entro frontiere ormai sicure.

Ma oltre a questi intenti tranquillizzanti, è possibile attribuire un qualche compito positivo a quel che sopravvive delle concezioni hilbertiane? Possiamo forse desumerlo da una caratterizzazione del metodo contenuta in un testo ricorrente tra le citazioni dei bourbakisti: « Possiamo ragionare con i segni del nostro linguaggio senza riferirci ad ogni istante alla loro significazione nel linguaggio ordinario: si può operare in modo puramente meccanico, senza occuparci dell'origine dei simboli manipolati; arriviamo ad una sorta d'algebra dove si può fare tutta la matematica » [35]. Il tutto sembra dunque ridursi all'enunciazione di un nuovo stile, senza che ciò debba intendersi in termini di affettazione o di capriccio, tutt'altro: come Chevalley osserva in un notevole articolo di quegli anni dedicato espressamente alla questione, un mutamento stilistico nella conduzione del discorso matematico può ripercuotersi profondamente nell'evoluzione del sapere. La sua considerazione secondo cui, al di là dello stile personale proprio del singolo matematico, ogni epoca è portatrice di « una tendenza molto ben riconoscibile ... [che] di quando in quando ... subisce rivoluzioni che modulano la scrittura, e dunque il pensiero, per i periodi che seguono » [36] ci sembra in effetti singolarmente appropriata all'argomento che stiamo trattando, e per molti versi emblematica.

Lo ' stile degli ε ' coltivato dalla scuola di Weierstrass (per quanto rappresenti agli occhi di Chevalley un modello caduto in disuso) fornisce un esempio dell'influenza esercitata da uno stile sugli indirizzi della ricerca: se esso scaturisce dall'opera di rigorizzazione dell'analisi, non può tuttavia esservi ricondotto per intero perché, esorbitando dai compiti che quel contesto gli attribuiva, suggerisce (o, quanto

[34] Cfr. le precedenti note 20 e 32.

[35] J. Herbrand, *Les bases de la logique hilbertienne*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XXXVII (1930), p. 247, spaziatura nostra.

[36] C. Chevalley, *Variations du style mathématique*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XLII (1935), p. 375, spaziatura nostra.

meno, conforta, benché in misura considerevole) una prospettiva piú ampia, volta a delineare un quadro unitario della matematica « fondato interamente a partire dai numeri reali per mezzo di definizioni costruttive » [37]. Fino a che punto si può allora interpretarlo come un manierismo conseguente all'aspirazione al rigore e non imputargli piuttosto lo schiudersi di un nuovo orizzonte epistemologico di cui costituirebbe la stessa possibilità d'attuazione? Difficile stabilirlo; d'altra parte a sostegno di questo stile stanno condizioni oggettive, giacché l'apparato di disuguaglianze su cui esso si fonda ha senso solo in presenza di particolari strutture d'ordine (in pratica di un continuo). L'emergenza di nuove zone tematiche irricevibili da questo impianto ne comporterà il declino, ed al costruttivismo weierstrassiano subentrerà un punto di vista ' descrittivo ' il cui prototipo è individuato, ancora una volta, nell'assiomatizzazione hilbertiana della geometria.

Quali siano i tratti salienti di questo nuovo stile è presto detto: omettendo di specificare la ' natura ' degli enti che sono argomento d'indagine, ci si limita ad enunciare un certo numero di loro proprietà costitutive, proponendone in tal modo una definizione ' in comprensione ' [38]. La conseguenza è che ogni particolare risultato viene sottoposto ad un'accurata decifrazione dei mezzi indispensabili al suo ottenimento, il che, se « ripristina la dignità della ricerca dell'eleganza dimostrativa, dandole un senso preciso » [39], determina soprattutto le spettanze delle teorie chiamate in causa. Un nuovo paesaggio teorico è allora riconoscibile: « i fatti matematici si trovano attualmente ripartiti quasi esaustivamente nelle diverse teorie piú o meno autonome che si sono costituite » [40]. L'algebra astratta, la topologia, la teoria dell'integrazione e le discipline che si trovano alla loro confluenza descrivono una configu-

[37] *Ibid.*, p. 379.

[38] È interessante notare che Chevalley fa rientrare in questa linea di tendenza non solo i lavori di uno Steinitz o di un Fréchet, ma anche quelli di Lebesgue sull'integrazione: « La definizione descrittiva dell'integrale formulata da Lebesgue (...) senza assumere ancora la forma esattamente assiomatica della geometria hilbertiana, ne seguiva tuttavia l'andamento fondamentale, giacché dava inizialmente l'integrale attraverso le sue proprietà caratteristiche, riservandosi di dimostrare in seguito la compatibilità delle condizioni imposte all'oggetto da costruire » (*ibid.*, pp. 380-381).

[39] *Ibid.*, p. 382.

[40] *Ibid.*, p. 383. Ben inteso « l'analisi strutturale dei fatti già conosciuti è lontana dall'essere compiuta, per tacere di quella dei fatti nuovi che si manifestano di quando in quando » (p. 384).

razione a cui guarderanno i bourbakisti nell'intento di ridefinire su di essa il sapere; quanto ai νοούμενα della matematica classica, se la loro ' realtà ' primigenia è ormai sacrificata, si tratterà di rilevare quale sia la loro nuova collocazione, dal momento che « i diversi sistemi di esseri matematici appaiono ciascuno come l'intersezione di un certo numero di teorie » [41].

2. - Gli archetipi dell'oggetto matematico.

Si dice che ogni generazione riscriva il proprio passato, il che può a buon diritto esser ripetuto a proposito dei bourbakisti: passato come susseguirsi delle conquiste che sono venute accumulandosi nel corso della storia, per rintracciarvi — in embrione — il disegno (e la legittimazione) del presente; passato come patrimonio acquisito di conoscenze, per porre mano al suo rifacimento complessivo allo scopo di governare il futuro. Nel far questo non si tratterà tanto di stimare la capienza di una teoria e di scaricarvi il peso dello scibile (riduzionismo che, quand'anche realizzabile di fatto, non sarebbe in grado di fornire altro che un'omogeneità di linguaggio ed un'unità soltanto esteriore), quanto di riconoscere un'altra sorta di unità, concettuale, che senza forzature ' epistemologiche ' si è instaurata attraverso l'evoluzione spontanea della scienza matematica, creandovi « una sorta di nucleo centrale piú coerente di quanto fosse mai stato » [42] e di riconsiderare tramite questa il piano generale dell'edificio.

Tale è l'assunto che traspare dal manifesto programmatico che Bourbaki pubblica nel 1948, firmandolo finalmente di proprio pugno. In esso il ridimensionamento dell'apporto del ' formalismo logico ' ai fini di quest'opera di ricostruzione appare evidente, non essendo ormai considerato che « una faccia, la meno interessante » dell'assiomatica, dal momento che di quest'ultima gli sfugge precisamente l'intento fondamentale, ovvero « l'intelligibilità profonda delle matematiche ». Che cosa significa? Evidentemente che il lavoro d'assiomatizzazione non deve consistere soltanto nella politura sintattica d'una teoria, bensí prefiggersi il compito piú alto della sua comprensione intrinseca, chiarendone i rapporti (precedentemente imperscrutabili) con le altre branche della

[41] *Ibid.*, p. 384.

[42] N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques*, cit., p. 37.

matematica. Si precisa in tal modo la disparità intercorrente tra ortografia e legittimazione della matematica che era apparsa smembrare l'eredità hilbertiana: dall'una non ci si dovrà attendere l'altra, la correttezza formale funzionando, come s'è visto, a livello 'precauzionale' senza che, tuttavia, le venga accompagnato un obiettivo epistemologico ben definito quale suo sbocco naturale. Preconizzando la rimozione dei propositi metamatematici del formalismo non si fa dunque che ribadire il valore secondario della posta in gioco: la loro eventuale soddisfazione, infatti, non garantirebbe alla scienza che un consolidamento 'di superficie'; d'altra parte, trattandosi della semplice « igiene del matematico » [43], apparirebbe smodato farne una regola ascetica.

Al di là del levigamento logico, in che cosa consiste allora la 'perscrutazione' di cui il metodo assiomatico sarebbe capace? Stando alle indicazioni del Nostro, non sembrerebbe potersi ricavare gran che: se ci vengono abbozzati i meccanismi su cui essa si fonda (dissociazione, in seno ad una regione teorica, degli elementi costitutivi del suo discorso, e loro successivi isolamento e ricombinazione 'in astratto'), è solo per rilevare che non v'è « nulla di nuovo in questo classico bilanciamento di analisi e sintesi » [44] e che, semmai, l'originalità dovrebbe vertere sulla direzione verso cui è indirizzato ciò che, di per sé, rimane uno strumento neutro in merito alla geografia del sapere. Neppure quando ci viene detto che tra le prerogative del metodo vi è quella di condurre alla presa del ragionamento matematico quelle che erano potute sembrare analogie occasionali tra dominî fino ad allora ritenuti separati, ne veniamo a scoprire molto di piú, salvo non risolversi a scompaginare la tradizionale gerarchia delle 'sostanze' intelligibili, tracciando sulle vie di comunicazione tra teorie la nuova mappa del sapere, sovvertimento ontologico che, se risolve (o meglio sopprime) la questione concernente la 'natura' delle entità matematiche, è anche volto ad estinguere un altro debito di realtà, affrancando la matematica dal vassallaggio nei confronti delle scienze sperimentali.

La dichiarazione d'irrilevanza di ogni criterio gnoseologico nell'attribuzione di preminenza a determinate nozioni o teorie (nel senso che, qualunque sia stato il processo mentale che ha portato a concepirle, esso non ha alcun peso riguardo alla posizione che quelle occupano in seno alla scienza) estromette la filosofia dal governo della cosa matema-

[43] Weil, *L'avenir des mathématiques*, cit., p. 309.

[44] Bourbaki, *op. cit.*, p. 38.

tica; d'altra parte ciò permette di eleggere le strutture come « *i soli* ' *oggetti* ' della matematica » [45] e di presentare questa concezione come quella a cui lo sviluppo scientifico ha condotto attraverso le fasi dell'aritmetizzazione prima e della riduzione insiemistica (rivista dal formalismo) poi, testimonianze anch'esse di una progressiva emancipazione del pensiero matematico dalle ingerenze della metafisica che preludono ad una gestione autonoma delle proprie faccende da parte della comunità scientifica, sottintendendo un'altra dichiarazione d'indipendenza: anche la fisica viene infatti estraniata dalle decisioni sugli orientamenti della ricerca matematica, per vedersi offerto un assortimento di teorie perfettamente confezionate tra cui scegliere secondo la necessità o l'ispirazione del momento. È il suo stesso sviluppo ad esser chiamato in causa per legittimare questa rigida ripartizione delle mansioni perché, se i suoi successi e soprattutto la sua utilizzazione di teorie matematiche lontane, al momento del loro concepimento, da qualsiasi ipotesi d'impiego nella comprensione del mondo empirico, portano a rafforzare la convinzione di « una sorta di preadattamento » della realtà al ragionamento matematico, « noi ne ignoriamo le ragioni profonde, supponendo che questi termini possano avere un senso preciso » [46]. La spiegazione che pretendeva di far scaturire le matematiche da ' intuizioni spaziali immediate ', facendone il calco di esperienze primordiali e limitandone in partenza lo spettro d'azione, è infatti irrimediabilmente compromessa dalla rivoluzione quantistica che ha dimostrato come « questa intuizione ' macroscopica ' del reale mascherasse fenomeni ' microscopici ' di tutt'altra natura »: tanto vale allora rassegnarsi ad un accomodante agnosticismo che, relegando nel mito « l'intima fusione di cui ci veniva fatta ammirare l'armoniosa necessità », si contenta di constatare il « contatto fortuito tra due discipline i cui legami sono assai piú reconditi di quanto si potesse supporre *a priori* » [47].

Questa non è, per altro, la sola ridistribuzione dei compiti contemplata dallo scenario bourbakista: se il fisico dovrà adeguare i suoi bisogni al vaglio di ciò che gli si presenta come « una riserva di *forme* astratte » [48] (senza che l'ecologia di quest'ultima rientri nelle sue competenze), sull'altro versante l'irregimentazione dei fatti matematici in

[45] *Ibid.*, p. 45 (in nota).
[46] *Ibid.*, pp. 46-47.
[47] *Ibid.*, p. 46.
[48] *Ibid.*

strutture fornirà gli strumenti d'indagine in questo campo, offrendo al ricercatore un « arsenale di teoremi generali » ed evitandogli con ciò di ripercorrere un medesimo tratto teorico per affrontare direttamente (ed adeguatamente equipaggiato) il problema in questione. La matematica strutturale, sovrastando « con un sol colpo d'occhio [ad] immensi dominî in cui un tempo sembrava regnare il caos piú informe », realizza dunque « un'*economia di pensiero* » [49] e può ostentare la propria ' modernità ', oltre che rispetto al risvolto ontologico implicito nella cernita degli argomenti (per cui nuovi ' contenuti ' soppiantano edifici plurimillenari), anche a quello — molto piú prosaico ma non per questo meno pubblicizzato — dell'organizzazione dell'attività scientifica, che parcellizzando il lavoro nell'intento dichiarato di massimizzare il prodotto, figura il metodo assiomatico come « il sistema di Taylor delle matematiche » [50]. Ciò non riguarda soltanto la cognizione dei rapporti tra teoria e teoria o la pianificazione dello sviluppo dell'una o dell'altra, ma — proseguendo nell'enfasi utilitaristica che vuole le strutture utensili della ricerca il piú possibile maneggevoli — si ripercuote anche sull'assetto interno delle singole teorie, che andranno ispezionate nella strategia dimostrativa che è loro propria e sollevate dalla condizione ' artigianale ' che ne faceva dipendere la comprensione dall'abilità personale del matematico, per far emergere quella che verrà proclamata la loro architettura portante.

Sono questi i criteri informatori della rifondazione bourbakista: le teorie (di struttura) sono — considerate singolarmente o per ' famiglie naturali ' — portatrici di un'impronta che ne attraversa la trama e che, una volta svelata in tutta la sua profondità, ne sancisce, per cosí dire, la morte, nel senso che quelle non vengono giudicate passibili di sviluppi tali da sconvolgerne l'impianto espositivo; riconosciutane allora l'importanza ' logistica ', saranno rubricabili tra i fondamenti della matematica a venire. È in questo modo che il vocabolario strutturale può distinguersi dal mero esercizio ' puristico ', attento alla sola proprietà di linguaggio, da cui invece — come si è riferito — si vogliono prendere le distanze; al contrario, la sua aspirazione è quella di penetrare nell'intrico del sapere per insediarvi un nuovo ordine, ed è questa la sostanza della metafora architettonica adottata da Bourbaki in questo frangente, benché vi si possano distinguere invero componenti diverse.

[49] *Ibid.*, pp. 42-43.

[50] *Ibid.*, p. 42.

La prima, che apre l'articolo, introduce la tematica ' unificante ': al quesito se si possa parlare di una matematica, scorgendovi « lo sviluppo di un organismo solidamente costruito che acquisisce ogni giorno piú coesione ed unità dagli ampliamenti che riceve »[51] o se piuttosto non convenga attenersi al plurale, proprio della lingua francese, rassegnandosi alla dispersione delle matematiche in un dedalo di discipline sempre piú specializzate e distanti, nel metodo e nel linguaggio, le une dalle altre, l'assiomatica è chiamata a fornire la propria risposta, indicando l'accezione minimale di questa omologazione nella normativa riguardante l'apparato deduttivo che sottostà alle varie teorie. Ma, dal momento che si confonde con i propositi formalisti o logicisti, essa viene presto accantonata attraverso le riserve e le precisazioni di cui s'è detto.

Resterebbero, per soffermarci sui principî d'unificazione, quelli insiemistici, in grado di apprestare l'involucro (la nozione generale di struttura) mediante cui ridurre gli enti matematici ad un ' tipo ' esclusivo; ma neppure questa è l'architettura che si andava cercando, poiché l'uniformità che essa è capace d'instaurare rimane inevitabilmente sospesa nel vuoto, mancandole la materia per poter fabbricare: il delineamento della nozione di struttura in questo scritto, limitandosi ad adombrarne l' ' essenza ' molto alla lontana attraverso una casistica (gruppi, relazioni) che ne rappresenta tutt'al piú la versione didascalica, riafferma in effetti che soltanto ciò che questo ricettacolo è acconcio a contenere ne può stabilire la rilevanza.

Che cosa, dunque, dovrà riempirlo e dargli vita? Evidentemente le strutture, ovvero quella varietà di ' forme ' contenutisticamente determinate in quanto dotate ciascuna di una fisionomia propria. Arriviamo cosí alla seconda faccia della metafora, che reintroduce differenze all'interno della precedente omogeneità e concerne la pratica matematica: la ' standardizzazione ' di cui parla Bourbaki va infatti riferita al riattamento delle teorie sulle quali s'imperniera il lavoro di ricostruzione allo scopo (conforme ai summenzionati criteri ' manageriali ') di conferir loro versatilità d'impiego nella ricerca, spianandone il tracciato ed uniformandone le tecniche dimostrative mediante l'eliminazione degli ' stratagemmi ' e delle ipotesi accessorie che li appesantivano. La riedificazione bourbakista si atterrà fondamentalmente a questi precetti:

[51] *Ibid.*, pp. 35-36.

' architettura ' significa allora a r t e d i c o s t r u i r e ed ad essa spetta l'allestimento ottimale delle singole teorie in vista dei compiti che vengono loro assegnati all'interno del progetto complessivo.

Queste due accezioni della similitudine avranno un riscontro preciso nell'impianto del trattato di Bourbaki, la loro opposizione ripercuotendovisi piuttosto vistosamente. Ne esiste tuttavia una terza (benché per la verità la metafora appaia qui piú ' urbanistica ' che architettonica)[52]: su di essa si incentra l'originalità ontologica dello scritto senza che, per altro, sia nitidamente riconoscibile una contropartita teorica che possa dirsi in qualche modo adeguata alla funzione che quella esplica in questo luogo. Solo forzatamente, infatti, potremmo interpretarla come un rudimentale riepilogo dell'opera (foss'anche ' ipostatizzato '), la spogli architettura degli *Éléments* restando onestamente articolata in libri e capitoli. Innovazione, come dicevamo, ontologica, essa nutre tutt'altre ambizioni: è dell'*architectura mundi* che qui si tratta, elargita all'occhio del profano perché possa commisurarvi la portata della ' riforma ' che la determina. Alla tradizionale suddivisione delle discipline matematiche, conforme alla presunta natura dei loro oggetti (un cimelio che viene paragonato alle antiche catalogazioni delle specie animali, fondate su ' descrizioni superficiali '), subentra allora un nuovo principio ordinatore che, per sostare sul terreno della storia naturale, guarderà alla struttura degli organismi piuttosto che alle loro rassomiglianze esteriori[53].

Questa classificazione ' razionale ' spazia sulla scala della generalità, dal suo infimo grado (le strutture particolari designate da teorie univalenti) a forme via via piú comprensive: fanno qui la loro apparizione i ' grandi tipi di struttura ', introdotti inizialmente con finalità esplicative quali esempi chiarificatori del concetto di struttura, ed incastonati in seguito alle sommità di questa gerarchia. Generi supremi, essi rappresentano i luoghi dotati del minimo d'informazione compatibile con una sussistenza concettuale[54]: li individua una progressiva spoliazione

[52] In effetti essa raffigura « la vita interna della matematica » come quella d'una metropoli i cui sobborghi si espandono in maniera caotica « mentre il centro si ricostruisce periodicamente, seguendo ogni volta un piano piú chiaro ed un ordine piú maestoso, abbattendo i vecchi quartieri ed i loro labirinti di viuzze per lanciare verso la periferia viali sempre piú diretti, piú ampi e piú comodi » (*op. cit.*, p. 45).

[53] Questo paragone ' zoologico ' è uno dei preferiti dai bourbakisti: compare una prima volta in Cartan, è quindi adottato da Bourbaki e viene ripreso in seguito da Dieudonné.

[54] Il che non si può dire, viceversa, a proposito del concetto generale di strut-

di connotati effettuata su quei nodi tematici che costituiscono l'ossatura della 'ristrutturazione' del sapere. Talvolta sembra loro corrispondere un alveo teorico ben determinato: è il caso delle topologie o delle strutture d'ordine (due appunto delle 'grandi famiglie'), nelle quali si dispiega una gradazione del livello astrattivo conseguente all'innesto di specificazioni assiomatiche su un unico nucleo portante di per sé sufficientemente caratterizzato; tal altra la diversificazione appare caotica e ben lontana dalla raffinatura di un qualche concetto primitivo: le strutture algebriche, in effetti, presentano al loro interno una vera e propria eterogeneità, troppo marcata perché lo 'stato comune' in cui convengono possa denotare una realtà teorica, inservibile com'è dal punto di vista delle conseguenze che se ne possono trarre (benché certamente lecito da quello della dottrina, il solo dato di una legge di composizione binaria — per altro inadeguato a coprire tutte le evenienze — contrassegnando una situazione insiemistica affatto trasparente).

Quale che sia il loro spessore teorico, ai 'grandi tipi di struttura' si perviene regressivamente, analizzando il quadro complessivo del riordinamento che s'intende promuovere, di cui quelli rappresentano in certo modo i punti di fuga: soltanto guardando ad esso, ossia ai 'contenuti' che è destinato a conglobare, se ne possono infatti rinvenire le ramificazioni che stabiliscono essere le 'strutture madri' (come anche vengono chiamate) i costituenti elementari di cui l'universo matematico si compone. È cosí che, se si tralasciano i modi del loro reperimento (omettendo cioè che una ricostruzione retrospettiva non vi ha còlto altro che una *habitudo rerum*), esse divengono 'nature semplici' attorno a cui il sapere, non piú tornando sui suoi passi ma istradato lungo un piano genetico, si organizza: ciò che da esse discende non avrà allora le sembianze di un 'concreto', bensí quelle di una progenie di sottospecie ed ibridi (come si configurano le strutture 'multiple' in cui intervengono, intrecciate tra loro ed a differenti stadi di complessità, quelle semplici, e dove sono ormai confinati i reperti della matematica classica).

D'altro canto, le riserve che Bourbaki formula a proposito della 'visione d'insieme' appena abbozzata (ché questa risulterebbe statica e idealizzata, semplificando troppo le cose) [55], conferma la precarietà dello

tura, congegnato al precipuo scopo di contenere quei 'grandi tipi': riducendosi a prospettarne la scelta e le successive possibili specificazioni e combinazioni, esso non contiene in sé alcuna impronta propria e non si spiega se non in vista di quelli.

55 In effetti capita che teorie 'concrete' (ossia i reali) si rivelino indispensa-

statuto delle strutture madri: spesso marginali in sede teorica se considerate isolatamente, la tassonomia strutturale le postula, è vero, come archetipi dell'oggetto matematico (plurali in quanto irriducibili l'una all'altra), ma unicamente per riconoscervi categorie presenti di fatto, ed anzi provvisorie, come viene ammesso apertamente [56]. Il loro precipuo officio resta infatti vincolato alle esigenze dell'ideologia, essendo esse impegnate alla delineazione di un affresco essoterico in cui, richieste a vantaggio dell'economia del discorso, sembrano mediare tra i suoi momenti (formale e contenutistico) precedentemente incontrati e costituenti due dei significati d'una metafora sulla quale ci siamo dilungati sin troppo, perché è ormai tempo di accertare che cosa a tutto ciò corrisponda nel *corpus* bourbakista.

3. - La codificazione del concetto di struttura.

Salvo alcune apparizioni sporadiche sulla *Revue Scientifique* e tra i *Comptes Rendus* dell'Accademia delle Scienze, l'esordio ufficiale di Bourbaki è databile alla pubblicazione del primo fascicolo degli *Éléments de Mathématique*, quello dei *Résultats* della teoria degli insiemi [57]. Il suo compito, estraneo ad ogni velleità fondatrice, consiste essenzialmente nell'enunciare l'adozione di una terminologia e di un armamentario teorico (di cui s'annunzia soltanto un futuro disbrigo 'formale' e, con esso, una disparità d'intenti che impronta fin dall'inizio l'impianto dell'opera) sufficienti, si dice, alla lettura dei successivi volumi: il punto di vista 'ingenuo' a cui lo scritto deliberatamente s'attiene e la mancanza di dimostrazioni non impediscono infatti d'esporre i ru-

bili per l'edificazione di teorie 'generali' (integrazione e topologia); inoltre la revisione strutturale dei fatti matematici è lontana dall'essere conclusa: « sussistono numerosi risultati isolati che non si sono saputi fin qui classificare né collegare in modo soddisfacente a strutture conosciute » (Bourbaki, *op. cit.*, p. 45). Infine « le strutture non sono immutabili né nel loro numero né nella loro essenza » (*ibid.*), sicché l'unico caposaldo di cui non è preventivata la caducità appare il concetto generico di struttura, ovvero la carpenteria insiemistica con la quale, in pratica, si confonde.

[56] Relative, cioè, ad un determinato momento storico della scienza senza ipotecarne i futuri sviluppi (cfr. la nota precedente).

[57] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, I, *Théorie des Ensembles (Fascicule de résultats)*, Parigi, Hermann, Actualités Scientifiques et Industrielles 846. Benché finito di stampare nel febbraio del 1940 (come si legge a p. 51), il volume è datato 1939 (frontespizio).

dimenti della grammatica insiemistica di cui si farà uso nella prosecuzione del trattato.

È in seno a quest'attrezzatura argomentativa che viene approntata, a conclusione del fascicolo, la definizione di struttura. I materiali necessari a fabbricarla sono, ovviamente, insiemi: un certo numero di questi, assunti esplicitamente ma senza altre specificazioni, costituisce il dato elementare su cui erigere un costrutto insiemistico mediante la formazione di prodotti e di insiemi delle parti. In senso generale, la famiglia di insiemi ottenuti a partire da una determinata collezione di essi (detti ' di base ') tramite l'applicazione delle operazioni $\mathfrak{P}$ e $\times$, reiterate e riapplicate ad ognuno degli insiemi cosí generati, è detta scala d'insiemi che ha come base quelli dati inizialmente. Ogni insieme della scala si chiama ' gradino ': mediante uno schema di costruzione (sequenza di operazioni applicate a determinati insiemi della scala) esso indica il livello di complessità a cui ci si intende riferire. In tal modo una relazione binaria su un insieme di bene E (o meglio la sua realizzazione ' in estensione ' o grafo) è situata ad una determinata ' altezza ', costituendo un sottoinsieme dell'insieme $\mathfrak{P}(E \times E)$.

Con ciò non si è data che un'intelaiatura indistinta su cui installare gli oggetti strutturali: per ottenerli è necessario introdurre differenze al suo interno, formulando condizioni che andranno riportate a quell'ordito, ossia riferite ad un determinato livello della scala. In accordo con la prospettiva estensionale che governa l'approccio bourbakista, un certo numero di proprietà $p, q, r \ldots$ attribuite agli elementi d'un dato gradino $\mathbf{G}$, individueranno certi suoi sottoinsiemi $P, Q, R \ldots$ definiti appunto da tali proprietà. La loro intersezione $\mathbf{T} = P \cap Q \cap R$ determina allora la ' specie di struttura ' relativa agli assiomi considerati, ed ogni elemento $\sigma \in \mathbf{T}$ verrà detto ' struttura ' della specie in questione. Il gradino $\mathbf{G}$ (a cui σ pure appartiene) denota infine la collocazione insiemistica (o ' caratterizzazione tipica ') della struttura.

Sostanzialmente, sono dunque due le componenti che concorrono a definirla: la prima consiste in un procedimento costruttivo che stabilisce il grado gerarchico su cui la struttura è chiamata ad agire, esprimendo in termini insiemistici la situazione ' operatoria ' che essa rappresenta. Leggi di composizione, relazioni o funzioni si traducono in tal modo in indicazioni d'appartenenza a determinate combinazioni della operazioni $\mathfrak{P}$ e $\times$. La seconda componente è quella sintattica o ' intensionale ' che, innestandosi sulla prima che le fornisce il supporto generico, fissa le caratteristiche della specie selezionando determinati oggetti all'interno del gradino prescelto. Quest'ultimo, per parte sua, presuppone una materia senza di cui si ridurrebbe ad uno schema puramente virtuale; d'altra parte, ai fini della teoria della specie, la funzione degli insiemi di base si limita precisamente al fatto che essi forniscono un sostrato assolutamente indifferenziato ad una forma che li richiede unicamente in quanto oggetti generici della teoria degli insiemi, senza che nessuna loro peculiarità intrinseca venga presa in considerazione.

La teoria delle strutture di specie $\mathbf{R} = \{\rho \in \mathfrak{P}(E \times E) \mid \rho \cdot \rho \subset \rho \wedge \rho \cap \rho^{-1} = \Delta\}$[58], per esempio, è costituita dall'insieme delle conseguenze della proposizione $\rho \in \mathbf{R}$ (unitamente agli assiomi della teoria degli insiemi), ma dal momento che gli assiomi che definiscono $\mathbf{R}$ « possono venir enunciati a proposito di un insieme di base assolutamente qualsiasi »[59], essa coincide con la teoria delle strutture d'ordine nel senso piú generale e se fa riferimento all'insieme sostegno E, è solo per assumerlo come testimone astratto e convogliarlo ad uno stadio superiore di complessità. In effetti quando Bourbaki scrive che « è opportuno sincerarsi che l'insieme $\mathbf{T}$ non sia *necessariamente* vuoto »[60] (dove $\mathbf{T}$ è una parte d'un gradino di una scala d'insiemi, definita da un dato sistema d'assiomi), intende contemplare la generalità del caso, ossia la non contraddittorietà degli assiomi, e non le circostanze relative alla scelta di particolari insiemi di base. Pertanto questi, pur divenendo le ' costanti ' d'una teoria, restano completamente indeterminati e funzionano da modelli di riferimento a cui riportare le situazioni ' concrete ' che potranno assumerne la parte.

Non è tuttavia sufficiente sostituire ad arbitrio un sistema di sostegno con un altro per poter identificare le due situazioni: l'identificazione che è lecito effettuare è vincolata dal concetto di isomorfismo che presiede allo stesso allestimento della nozione di struttura e ne regola, per cosí dire, i rapporti verso l'esterno. Un'ipotesi aggiuntiva

58 La ' caratterizzazione tipica ' indica che ρ è una relazione binaria su E, cioè un insieme di coppie ordinate di suoi elementi; $\rho \cdot \rho$ rappresenta invece la composizione della relazione con se stessa (ossia l'insieme delle coppie (x, z) per cui esista $y \in E$ tale che (x, y) e (y, z) appartengano entrambe a ρ): il primo assioma indica pertanto la transitività della relazione. ρ^{-1} è poi l'insieme delle coppie di ρ con ordine invertito delle componenti, mentre Δ è la diagonale di E (l'insieme delle coppie con le due componenti identiche): l'assioma esprime dunque la riflessività e l'antisimmetria della relazione.

59 Bourbaki, *Fascicule de résultats*, cit., p. 42.

60 *Ibid.*, p. 45.

è in questo caso necessaria: quella che, nel contesto della teoria (cioè nell'ipostatizzazione della forma), definisce il livello d'indiscernibilità tra gli oggetti su cui una struttura è costruita e che consiste nella possibilità d'istituire una corrispondenza biunivoca tra i differenti insiemi di base per trasportarla, seguendo uno stesso schema di costruzione, via via ai prodotti e alle parti mediante le sue estensioni canoniche: due strutture si diranno cosí isomorfe se risultano immagini l'una dell'altra mediante la trasmissione della corrispondenza tra gli insiemi di base sino alle specie su questi definite. Tutto ciò, che non fa altro che tradurre in un impianto ' genetico ' l'ordinaria definizione d'isomorfismo [61], rappresenta il principio d'indiscernibilità tra oggetti agli occhi dell'analisi strutturale, mentre in questo scritto non viene fatta menzione dei loro apparentamenti parziali costituiti dai morfismi, che la nozione di struttura, come vedremo, non è di per sé in grado d'inquadrare univocamente.

Infine la dottrina deve farsi carico di un altro criterio d'equiparazione, concernente non piú oggetti ma teorie: esso agirà all'interno di una determinata scala d'insiemi, ponendo a confronto due specie collocate su gradini distinti ed individuate da differenti sistemi d'assiomi. Gli individui delle due specie che si corrispondono mediante una qualsiasi applicazione biunivoca che sia possibile « definire esplicitamente » [62] tra loro, verranno allora considerati designare una medesima struttura sugli insiemi di base della scala, ed i due sistemi d'assiomi saranno in tal caso detti ' equivalenti '. Intuitivamente l'equivalenza tra due sistemi assiomatici esige che essi descrivano una medesima situazione, risultando coestensivi in quanto teorie (ossia deducibili l'uno dall'altro). Come la condizione formulata da Bourbaki sia sufficiente a render conto di ciò, non è chiaro: tutto sta, evidente-

[61] In effetti in questo testo la nozione di isomorfismo è fatta seguire a quella di ' trasporto di struttura ', che rappresenta la riproduzione del percorso costruttivo che ha condotto a definire una struttura su insiemi di base differenti, previa una loro corrispondenza biunivoca con quelli che sorreggono la struttura considerata inizialmente. La struttura a cui si perviene estendendo la corrispondenza lungo lo schema di costruzione è detta ' ottenuta trasportando la precedente tramite le biezioni date '. La definizione d'isomorfismo ne dipende, in quanto due strutture vengono considerate isomorfe se l'una può essere ottenuta dall'altra mediante trasporto.

La versione ' formalizzata ' della teoria, viceversa, invertirà l'ordine delle nozioni.

[62] Bourbaki, *op. cit.*, p. 43.

mente, ad intendersi sul significato di quell' ' esplicitamente ' che vi è contenuto, ma non potremmo cercar ragguagli in un testo che, per propria ammissione, lascia tra parentesi l'intero apparato deduttivo della teoria.

In effetti il suo aggiornamento ai canoni del formalismo (che Bourbaki dà alle stampe a quasi vent'anni di distanza)[63] s'incaricherà di apportare i chiarimenti necessari, riformulando la nozione su un diverso registro di precisione: lo scenario è ancora ' estensionale ', ma i meccanismi dello scambio teorico sono circostanziati grazie alla nozione di ' procedimento di deduzione ' che funziona da intermediario tra due specie di struttura e che consiste, in pratica, nella possibilità di reperire in seno alla teoria delle strutture d'una specie data (facendo uso, cioè, dei suoi materiali e restando all'interno del suo tracciato deduttivo) una struttura d'altra specie[64]. In presenza di due procedimenti di questa sorta che connettano reciprocamente due specie di struttura definite sugli stessi insiemi di base e sotto la condizione che essi stabiliscano una corrispondenza biunivoca tra le due specie[65],

[63] Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, fasc. XXII, *Structures* (cap. IV della *Théorie des Ensembles*), Parigi, Hermann, 1957. Come gli altri fascicoli degli *Éléments*, anche questo ha subito revisioni periodiche. Per parte nostra ci limiteremo al confronto della prima edizione con la piú recente (edita da Hermann nel 1977) che riunisce in un unico volume recante il titolo di *Théorie des Ensembles* i tre fascicoli apparsi separatamente negli anni 1954-1957. In particolare ci riferiremo prevalentemente ad essa nell'esame della nozione di equivalenza tra specie di struttura, perché l'argomento vi è trattato in modo piú circostanziato (e suddiviso in due paragrafi anziché in uno soltanto come accadeva nell'edizione originale).

[64] Per dirla in modo un po' meno vago, un procedimento deduttivo della specie $\mathbf{T}$ è costituito da un insieme P definito all'interno di $\mathcal{T}_{\mathbf{S}}$ (teoria delle strutture di specie $\mathbf{S}$) attraverso determinate condizioni ed i n e s s a dimostrato essere una struttura di specie $\mathbf{T}$. P e gli insiemi di base su cui esso viene definito devono inoltre essere costruiti facendo uso delle sole ' costanti ' di $\mathcal{T}_{\mathbf{S}}$ in compatibilità con gli isomorfismi che hanno luogo relativamente a questa specie.

I casi piú ovvi di strutture ' dedotte ' son quelli che avvengono per disaggregazione di un ' misto ' (ad esempio il grafo di una legge di composizione sull'insieme-sostegno di un gruppo topologico fornisce la struttura gruppale soggiacente a quella piú complessa), per restrizione rispetto ad uno degli insiemi di base (per esempio la restrizione a $\mathbb{R}$ del corpo degli scalari costituisce un procedimento di deduzione della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ a partire da quella di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$) o infine — senza colpo ferire — per inclusione entro specie ' meno ricche ', ossia piú comprensive: in tal modo una struttura d'insieme totalmente ordinato costituisce anche una struttura d'ordine (che si può considerare soggiacente alla prima).

[65] Come si è detto, un procedimento di deduzione di una struttura P di specie $\mathbf{T}$ a partire da una struttura σ di specie $\mathbf{S}$ è dato da un sistema di condizioni

si otterrà allora l'equivalenza di queste ultime, ogni teorema dell'una teoria essendo traducibile (grazie al ' dizionario ' costituito dai procedimenti considerati) in un teorema dell'altra.

Per il resto la riedizione ' formalizzata ' della nozione generale di struttura non presenta differenze di rilievo per ciò che riguarda la sua caratterizzazione di fondo: si tratta, in sostanza, di ridefinirla adeguandola alle esigenze del diverso contesto che la riceve. Alla funzione meramente propedeutica del fascicolo ' informale ' subentra qui un'istanza fondatrice: ma questo mutamento ' retorico ' (sulla cui natura ed i suoi moventi torneremo piú avanti) si ripercuote essenzialmente sugli antecedenti del concetto che qui ci interessa, senza intaccarne il disegno costitutivo. Ciò che importa è piuttosto che le sbrigative ' descrizioni ' del primo fascicolo si mutano qui in proposizioni di una teoria assiomatica, con tutti gli accorgimenti che il caso comporta.

In tal modo vengono approfondite le modalità di costruzione e d'impiego delle nozioni precedentemente introdotte: quella di specie di struttura, per esempio, nella sua accezione immediata si risolve estensionalmente nell'individuazione di oggetti (corrispondenti agli assiomi della specie), che ha luogo entro un dato gradino della scala d'insiemi prescelta (l'ambiente in cui la scala in questione si colloca). Ma quest'ultima deve continuare a sussistere al di là del referente insiemistico su cui è definita, ossia essere riconoscibile in quanto configurazione tematica applicabile a situazioni distinte che ne ripetono il procedimento costruttivo e ne rispettano gli assiomi, in modo che le teorie che di tali situazioni si fanno carico possano ereditare il patrimonio di teoremi relativo alla specie di struttura considerata. Il ricupero di questo aspetto intensionale (che non ha corrispettivo estensionale, dal momento che quest'ultimo coinvolgerebbe delle classi) nella prima versione veniva effet-

che individuano P e nella cui formulazione sono coinvolti σ ed i suoi insiemi di base. Supponiamo allora dati due procedimenti di deduzione $P = P(x_1, \ldots, x_n, \sigma)$ e $Q = Q(x_1, \ldots, x_n, \tau)$ di strutture di specie $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$ a partire dalle strutture σ di specie $\mathbf{S}$ e τ di specie $\mathbf{T}$ rispettivamente, dove $x_1, \ldots, x_n$ sono gli insiemi di base su cui sono definite sia $\mathbf{S}$ sia $\mathbf{T}$.

Poiche σ è una struttura generica di specie $\mathbf{S}$, è lecito sostituirla con una struttura della stessa specie, in particolare Q; lo stesso tipo di considerazioni valgono poi nel caso di τ e P. Applicando allora i procedimenti di deduzione P e Q quali rappresentanti delle rispettive specie, la condizione che assicura l'equivalenza di $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ (e la biunivocità della corrispondenza) è che $P(x_1, \ldots, x_n, Q(x_1, \ldots, x_n, \tau)) = \tau$ e $Q(x_1, \ldots, x_n, P(x_1, \ldots, n_n, \sigma)) = \sigma$ siano conseguenze degli assiomi di $\mathcal{T}_{\mathbf{T}}$ e $\mathcal{T}_{\mathbf{S}}$ rispettivamente.

tuato spogliando gli insiemi di base di ogni determinazione, affinché le strutture costruite su di esse risultassero dotate della sola forma fornita loro dal materiale sintattico della teoria. Se è la stessa idea che guida il nuovo allestimento (perché pur sempre di insiemi ' qualsiansi ' si tratta, quando essi vengono assunti in qualità di ' argomento ' della teoria di una specie), nondimeno separando la sequenza di operazioni dagli insiemi a cui è applicata si distingue uno schema di costruzione dalle sue realizzazioni possibili, ed esplicitando i criteri di sostituibilità tra oggetti si potrà piú opportunamente ravvisare una stessa specie su tali o tal altri insiemi di base [66].

D'altra parte, non esistono oggetti se non in quanto veicolati da teorie: quella relativa ad una determinata specie esibirà allora una ' struttura generica ' come supporto del suo percorso deduttivo ed in funzione vicariante rispetto ai ' possibili ' che vi si potranno immedesimare, quando altre teorie rintracceranno tra i loro teoremi (ed a proposito dei propri oggetti) la caratterizzazione tipica e gli assiomi di quella specie, fornendo con ciò un rappresentante (o ' modello ') della teoria in questione.

Come si vede, siamo di fronte a variazioni marginali, a miglioramenti nella scrittura o nel dettaglio, mentre la vera novità di questo scritto è costituita dall'introduzione di nozioni che nella precedente versione non comparivano: quella di morfismo e le altre che ne dipendono.

I morfismi si danno per famiglie, e piú precisamente per famiglie di applicazioni tra insiemi dotati di strutture della stessa specie sotto le uniche condizioni che la composizione di morfismi di una famiglia (quando ha senso) [67] costituisca ancora un morfismo della stessa e che ogni biezione che ne fa parte unitamente alla sua reciproca sia un isomorfismo, e viceversa. Se i morfismi manifestano in tal modo un'organizzazione che prelude a quella categoriale, ricalcandone l'assetto fondamentale, proprio tale prossimità evidenzia la relativa indipendenza dei due sistemi di nozioni: una famiglia di morfismi, infatti, non è univocamente determinata dall'assunzione di una specie di struttura, la sua definizione consentendo molteplici possibilità di realizzazione [68]. D'altro canto, l'e-

[66] Il riferimento a questi ultimi consente in effetti di evitare il ricorso alle classi nella definizione d'una specie.

[67] Ogni qualvolta, cioè, il codominio di un'applicazione della famiglia coincide con il dominio di un'applicazione della stessa.

[68] Per esempio, sia le applicazioni continue sia quelle ' aperte ' (l'immagine di

strema generalità della definizione finisce col relegare al rango di caso particolare quegli apparentamenti naturali tra strutture algebriche costituiti dalle ' rappresentazioni omomorfe ' (applicazioni che conservano la legge di composizione)[69].

Quale che sia l'autonomia teorica della nozione di struttura rispetto a quella di morfismo, sta di fatto che la variegata casistica che segue (confrontabilità per finezza, strutture iniziali e finali) richiede d'essere ambientata entro una specie corredata da una definizione di morfismo. Un interesse particolare compete in proposito alla nozione di applicazione universale: essa coinvolge una famiglia di applicazioni che connettono un determinato oggetto d'una teoria ad una specie di struttura, in modo che il prolungamento di ogni suo membro mediante un morfismo (d'una sorta preliminarmente associata alla specie) faccia anch'esso parte della famiglia. Una di tali applicazioni è allora detta universale (rispetto all'insieme di dati elencato) se qualsiasi altra applicazione della famiglia si può esprimere sotto forma di prolungamento dell'applicazione in questione mediante uno ed un solo morfismo del tipo considerato. Poiché la soluzione del problema (se esiste) è dimostrata essere unica a meno di isomorfismi, essa può venir interpretata come il raccordo privilegiato dell'oggetto iniziale con la specie di struttura verso cui questo è inviato: ciò appare chiaramente allorché il problema si configura in termini di immersione di un oggetto in un altro, strutturalmente piú ' ricco ', che — come suo ' completamento ' — lo immette nella specie di cui costituisce, per cosí dire, l'avamposto (comparendo come il membro di quest'ultima che gli è piú prossimo), per smistarlo quindi lungo le sue vie di comunicazione interna, ossia i morfismi (l'universalità indicando che il passaggio è in certo senso obbligato)[70].

un aperto essendo ancora un aperto) costituiscono famiglie di morfismi per la specie delle strutture topologiche.

[69] Ciò non stupisce dal momento che l'unica circostanza in cui la struttura definita sugli insiemi connessi dai morfismi entra direttamente in gioco nelle condizioni enunciate dalla definizione generale è quella delle applicazioni isomorfe.

[70] Diverse costruzioni di strutture ' libere ' (generate a partire da un dato insieme) si lasciano interpretare in termini di applicazioni universali: esse immergono infatti l'oggetto di partenza (amorfo) nella ' minima ' struttura della specie considerata ch'è in grado di accoglierlo. Nella medesima configurazione (arricchimento della struttura di cui è dotato l'oggetto iniziale) rientrano anche la costruzione del campo dei quozienti su un dominio d'integrità, il completamento di uno spazio uniforme e la ' compattificazione ' di uno spazio topologico.

La nozione di applicazione universale, che — tradotta ad un livello superiore

Tale è dunque la codificazione bourbakista del concetto di struttura e la locuzione appare appropriata, giacché — stando a quanto Dieudonné asserisce in proposito — « ciò che Bourbaki ha fatto è definire e generalizzare un'idea già diffusa da lungo tempo » [71]. Rispetto alla definizione di Birkhoff esaminata nel precedente capitolo, quella di Bourbaki risulta in effetti piú comprensiva, congegnata com'è in vista della molteplicità di situazioni che è destinata a sussumere. La prima, invero, verteva essenzialmente su quel prototipo di struttura rappresentato dai ' sistemi algebrici ', di cui salvaguardava l'assetto intuitivo (una collezione di operazioni finitarie associate ad un dato insieme) senza spingere troppo in profondità (traducendoli esplicitamente, per esempio, in termini di costruzioni insiemistiche) il loro grado di riduzione formale, ma accontentandosi di un livello di generalità che si mostrava fecondo di conseguenze ed a cui risultavano estranei i riaccomodamenti della definizione (come l'ammissibilità di operazioni transfinite), perché se questi le permettevano di far presa, per esempio, sulla topologia, non potevano tuttavia ereditare la messe di risultati concernenti, appunto, la nozione di ' sistema algebrico '.

La differenza tra le due definizioni non va infatti commisurata alla maggiore o minore varietà di situazioni che esse riescono a radunare, né al grado di naturalità del rispecchiamento che effettuano nei confronti dei casi ' concreti ' (quasi che prerogativa di una stipulazione fosse quella di carpire un'essenza sussistente a detrimento di ogni altra descrizione possibile), ma dovrà esser riportata alle dottrine che, utilizzandole, ne forniscono la motivazione effettiva ed alle quali andrà riferito ogni giudizio di merito o convenienza.

di generalità — sarebbe entrata a far parte della ' grammatica ' categoriale, venne tuttavia formulata indipendentemente da questo linguaggio (per quanto esso fosse allora già disponibile) in uno scritto di Samuel del 1948, da cui Bourbaki desume anche la definizione di morfismo che abbiamo schematicamente riportata. Rispetto alla definizione di Samuel di applicazione universale, quella di Bourbaki appare tuttavia semplificata, perché in essa è espunto ogni riferimento alla specie di struttura a cui il dominio dell'applicazione stessa eventualmente appartiene, mentre nella formulazione di Samuel la famiglia di applicazioni di uci quest'ultima fa parte è direttamente chiamata a collegare due specie di struttura distinte. Inoltre le ipotesi sui prodotti nella specie d'arrivo e sulla cardinalità dell'immagine dell'oggetto iniziale (che costituivano parte integrante della definizione di Samuel) divengono in Bourbaki condizioni di solvibilità del problema. Cfr. P. Samuel, *On Universal Mappings and Free Topological Groups*, « Bulletin of the American Mathematical Society », LIV, 1948).

[71] J. Dieudonné, *The Work of Nicholas Bourbaki*, cit., p. 138.

Nel caso in questione emerge allora la disparità d'intenti che informa i due impianti teorici: quello di Birkhoff, come s'è visto, ipostatizzava una ' nozione comune ' per renderla argomento d'un esame diretto, innalzando con ciò il livello d'astrazione fino ad allora tematizzato (giacché soltanto un'unità metodica accomunava le diverse teorie appartenenti all'algebra astratta). Alla definizione di Bourbaki, viceversa, non fa riscontro una teoria che assuma la nozione generale di struttura come proprio oggetto d'indagine: questa assolve un officio prevalentemente descrittivo (in un senso che dovremo precisare), anche perché i risultati di Birkhoff, circoscritti sostanzialmente all'ambito algebrico, appaiono difficilmente trasferibili alla situazione piú generale considerata da Bourbaki. Inoltre, nell'allestimento di Birkhoff, il luogo privilegiato di raffronto tra strutture era costituito da ciò che oggi vien detto ' tipo di similarità ' e che, tenendo conto delle sole arietà delle operazioni, corrisponde come caso particolare alla ' tipificazione ' nel senso di Bourbaki (nozione che — come abbiamo avuto modo di vedere — esercita una funzione semplicemente preparatoria, essendo incorporata nella definizione di specie di struttura, la quale esprime un apparentamento piú stretto e ' speculare ' rispetto al concetto di teoria assiomatica). In effetti, la delimitazione del campo d'indagine e la semplicità di notazione che esso consente permettono a Birkhoff non solo di associare ad ogni sistema algebrico le nozioni di omomorfismo, sottostruttura ed estensione in modo naturale (ed univoco), ma anche di farlo indipendentemente dalle proprietà delle operazioni coinvolte (ossia dagli assiomi che le esprimono), essendo sufficiente alla loro formulazione la richiesta che le operazioni siano conservate attraverso le corrispondenze. Dove intervengono invece considerazioni sugli assiomi, ciò avviene al fine di esaminare le capacità espressive ed il grado di complessità del linguaggio in cui essi vengono formulati, rapportandolo ai modelli che gli corrispondono ed alle loro interrelazioni: un ordine di problemi che, ancora, non sembra destare l'interesse di Bourbaki.

Ci resta dunque da esaminare il compito (caratterizzato fin qui solo negativamente) che la nozione generale di struttura svolge nell'economia del trattato bourbakista, e per far questo dobbiamo in primo luogo guardare ai suoi antecedenti immediati, ovvero alla sua collocazione all'interno della teoria degli insiemi.

4. - Verso un nuovo organigramma del sapere.

I capitoli che compongono il primo libro degli *Élements de Mathématique*[72] concernono, nell'ordine, la 'descrizione' della matematica formale, la teoria degli insiemi in senso stretto, le strutture d'ordine (congiuntamente ai cardinali e agli interi), mentre quello conclusivo, che abbiamo appena discusso, è dedicato all'accezione generale del concetto di struttura. Una nota storica, infine, informa concisamente delle vicissitudini che, dalla Grecità a Gödel e Gentzen, la matematica ha conosciuto riguardo ai propri 'fondamenti'.

Nel primo capitolo vengono esposte le regole a cui deve (o, meglio, dovrebbe) attenersi la stesura di un testo matematico in conformità all'ideale di rigorizzazione del discorso che si espleta mediante la sua consegna ad un linguaggio segnico ed al dispositivo combinatorio che ne governa la sintassi. Sennonché, non appena fissati questi canoni, Bourbaki se ne discosta deliberatamente, giustificando la trasgressione con argomenti d'ordine pratico: cosí una notazione senza parentesi e simboli d'abbreviazione ci è prospettata raccomandabile in quanto esente da ambiguità per poi essere accantonata in nome dell'intelligibilità del discorso, ché la sua adozione « condurrebbe a difficoltà tipografiche e mentali insormontabili »[73]. L'allontanamento dall'eremo della formalizzazione integrale (che appare dunque piú una vocazione ideologica che non una risoluzione metodologica) si compie cosí fin dalle prime righe, mentre viene soltanto indicata « la via lungo cui vi si potrebbe tornare »[74], ma battuta, nei fatti, quella della matematica piú modestamente 'astratta', come risulterà chiaramente dalla prosecuzione del trattato.

È in effetti un'apologia della prassi quella che, secondo una strategia singolare, si cerca nella deroga ai principî del formalismo e nondimeno sotto il suo vessillo, accomunando la necessità d'introdurre definizioni o altri espedienti volti a rendere la notazione piú maneggevole e l'argomentazione piú spedita alla legittimità d'impiego della lingua francese (e delle « risorse della retorica »[75]), a cui l'esposizione rimane costantemente affidata. D'altra parte, come abbiamo desunto dall'esame

[72] Ci riferiremo qui all'edizione della *Théorie des Ensembles* del 1977.

[73] *Op. cit.*, E. I. 14.

[74] *Ibid.*, E. I. 11.

[75] *Ibid.*

dei presupposti epistemologici dei bourbakisti, la formalizzazione non è destinata a fornir garanzie se non in ordine alla trasparenza nel discorso, scissa come (secondo il loro modo di vedere) dovrebbe essere da ogni sorta di trattamento metamatematico: ed è precisamente l'inopportunità di fare appello ad un criterio di questa natura che tende necessario il ricorso ad un altro tipo d'autorità, la sola che possa legiferare in questo campo, ossia « il senso comune del matematico »[76]. A questo spetta allora di valutare la misura e la convenienza dell'affrancamento dalla versione incontaminata, ma inservibile, di un formalismo 'a prova di errore' (la cui enunciazione funge dunque unicamente da termine di confronto che si fa via via sempre piú remoto), consentendo di sconfinare nel linguaggio comune e di conformarsi in tal modo al costume corrente nella presentazione di un testo matematico.

Con lo stesso pragmatismo (o, come lo chiama Bourbaki, « esprit réaliste »[77]) viene affrontata la tematica della non contraddizione: la formalizzazione vi si apparenta solo marginalmente, permettendo di localizzare l'origine di un'eventuale contraddizione per rimaneggiare poi appropriatamente la teoria che la contiene al fine d'impedirne l'insorgenza. Per quanto concerne la prevenzione, invece, non rimane che far affidamento sull'esperienza: la solidità dell'edificio di cui Bourbaki sta gettando le fondamenta è cosí testimoniata unicamente dal fatto che la teoria degli insiemi, su cui esso s'incentra, ha trascorso indenne il periodo successivo alla sua risistemazione, per quanto esposta allo sguardo di una generazione di matematici ormai sufficientemente scaltriti; la corroborazione fornita da qualche decennio di praticantato (mezzo secolo secondo l'edizione del 1977), è allora tutto ciò che Bourbaki si sente autorizzato a mettere in campo riguardo alla sua affidabilità.

Tornando agli argomenti del capitolo, incontriamo innanzitutto una serie di nozioni metateoriche (quali quelle di teoria, assioma, dimostrazione) congiunte a precetti del corretto scrivere (formule ben formate, sostituzioni) ed a sue 'figure' particolari abitualmente adottate nella pratica d'ogni giorno (le tecniche dimostrative di riduzione all'assurdo o di assunzione d'ipotesi o di costanti ausiliarie). Ma accanto a questo aspetto normativo, che ne fa una sorta di prontuario grammaticale, il testo ne presenta uno prettamente espositivo, in cui sono enunciati fram-

[76] *Ibid.*
[77] *Ibid.*, E. I. 12.

menti della teoria degli insiemi (la parte, cioè, del suo sistema d'assiomi che concerne l'uso dei connettivi logici, dei quantificatori e del segno d'uguaglianza), catalogando per inclusione successiva [78] le teorie a cui essi danno luogo ed elencando alcune loro proprietà.

La teoria della quantificazione e quella dell'uguaglianza assumono τ come simbolo primitivo, mentre i quantificatori esistenziale ed universale rappresentano dei simboli derivati (cioè delle abbreviazioni); poiché quest'impostazione si ripercuoterà sugli assiomi specificamente insiemistici, ossia sull'assetto generale della teoria, è opportuno spendere qualche parola in proposito.

τ è un operatore che trasforma enunciati in oggetti; intuitivamente svolge le masioni dell'articolo indeterminato: apposto ad una formula R (che possiamo interpretare come proprietà di un oggetto x), esso indica un oggetto privilegiato che la verifica, ammesso che un simile oggetto esista, oppure — in caso contrario — un oggetto del tutto indeterminato. Nel formalismo τ interviene in due modi: il primo ne stabilisce il significato strettamente operatorio, riferito ancora alla notazione 'polacca' [79]; il secondo, una volta stabilito che $\exists\, x\, \mathrm{R}(x)$ equivalga per definizione a $\mathrm{R}(\tau_x \mathrm{R}(x))$ e $\forall\, x\, \mathrm{R}(x)$ a $\mathrm{R}(\tau_x \sim \mathrm{R}(x))$, ne specifica il ruolo inerente al tracciato assiomatico nello schema della quantificazione [80] $\mathrm{R}(a) \rightarrow \exists\, x\, \mathrm{R}(x)$ (se la proprietà R conviene ad un oggetto a, allora essa conviene anche all'oggetto $\tau_x \mathrm{R}(x)$), ed in quello dell'uguaglianza

[78] In effetti ognuna di queste teorie presuppone gli schemi d'assiomi di quella che la precede. Ciò non è che un caso particolare di quella che Bourbaki definisce 'confrontabilità tra teorie': una teoria è più forte di un'altra se gli schemi d'assiomi, gli assiomi espliciti e l'alfabeto di quest'ultima fanno parte rispettivamente degli schemi d'assioma, dei teoremi e dell'alfabeto della prima.

È in questo contesto che Bourbaki introduce, attraverso un esempio, il concetto di modello come mezzo di comunicazione tra teorie che consente di applicare a quella che esibisce tale modello i risultati dell'altra: cfr. E. I. 24.

[79] In questo caso τ prescrive la sostituzione (in seno alla formula su cui agisce) di tutte le occorrenze della lettera con cui è indicizzato con il simbolo $\square$ corredato da alcuni accorgimenti tipografici (sovralineature con funzione d'indice) su cui sorvoliamo. Il simbolo $\square$ è rubricato, al pari di τ, tra i simboli logici di una generica teoria matematica: il suo impiego è limitato a fungere da supporto (o 'argomento') di τ, ed è pertanto presupposto in ogni espressione quantificata, benché la sua adozione in forma esplicita sia circoscritta alle prime pagine del trattato per poi scomparire definitivamente (o esser relegato in nota a titolo di curiosità: cfr. E. I. 6). Viceversa τ, in forma 'abbreviata', compare saltuariamente nel corso del testo.

[80] La notazione in forma di 'funzione proposizionale' che qui adottiamo a scopo semplificativo non è in realtà quella di Bourbaki.

$\forall x(\mathrm{R}(x) \Leftrightarrow \mathrm{S}(x)) \Rightarrow \tau_x \mathrm{R}(x) = \tau_x \mathrm{S}(x)$ (gli individui ' caratteristici ' di due proprietà equivalenti sono uguali).

Storicamente la sua introduzione risale a Hilbert; Bourbaki ne fa menzione tra le pagine della *Note historique*, giudicandola « la piú interessante » [81] delle innovazioni apportate al formalismo logico-insiemistico: per suo tramite si definiscono infatti i quantificatori e si rendono superflue l'assunzione dell'assioma di scelta e quella del simbolo ' universale ' ι di Russell. Ciò che Bourbaki riesuma da Hilbert non è tuttavia l'Aristide, che ha un significato esattamente opposto: definito dall'assioma $A(\tau(A)) \Rightarrow A(a)$ [82] con il compito di regolare l'apertura del formalismo verso il transfinito, esso assumeva infatti la parte del candidato meno raccomandabile a cui riferire il predicato A (intuitivamente l'assioma si legge: se la proprietà A è posseduta dall'oggetto $\tau(A)$, allora ogni oggetto ne gode; da cui il nomignolo, assumendo A come significante l'essere corruttibile). Si tratta invece del simbolo ε, di cui Hilbert evidenziava le seguenti prerogative [83]: i quantificatori esistenziale e universale si lasciano definire (analogamente alla lezione bourbakista) mediante ε; se il predicato A conviene ad un solo individuo, $\varepsilon(A)$ designa quel preciso individuo; in presenza invece di una pluralità di oggetti che lo soddisfano, ε ' sceglie ' uno qualsiasi di essi. Nelle due versioni, tuttavia, lo scopo del suo intervento non consisteva tanto nel « semplificare l'impiego » del formalismo, come scrive Bourbaki [84], quanto di renderlo accondiscendente (nelle intenzioni, per lo meno) alla manipolazione metamatematica: in ambedue i casi, infatti, vengono abbozzate prove di coerenza volte a stabilire l'impossibilità di derivare una contraddizione dal formalismo in esame. Dal momento che la presenza dei quantificatori in una dimostrazione, per esempio, di $0 \neq 0$, si riduce — grazie alla definizione di ε o τ — ad un'unica figura (per quanto vi si distinguano diversi gradi di complessità), si tratterà di mostrare l'eliminabilità dei simboli transfiniti dalla dimostra-

[81] *Op. cit.*, E. IV. 42.

[82] In questo caso i quantificatori universale ed esistenziale sono definiti da $A(\tau A) = \forall a A(a)$ e $A(\tau(\sim A)) = \exists a A(a)$. Cfr. D. Hilbert, *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, « Mathematische Annalen », LXXXVIII (1923), p. 183.

[83] Cfr. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, « Abhandlungen aus den math. Sem. der Hamb. Univ. », VI (1928). ε vien qui definito dall'assioma $A(a) \rightarrow A\,\varepsilon(A)$ (analogamente a quanto Bourbaki fa a proposito di τ). Il simbolo ε venne introdotto per la prima volta da Ackermann nel 1924.

[84] Bourbaki, *op. cit.*, E. IV. 42.

zione stessa, mediante successive sostituzioni che li ' interpretino ' contenutisticamente: è appunto la loro forma che si presta ad un trattamento di questa natura, semplificando dunque i termini del problema ben piú che l'utilizzazione matematica del formalismo. Per ciò che attiene poi alla funzione di scelta del simbolo ε, essa non coincide che parzialmente (in rapporto alle assunzioni fatte sinora) con l'assioma di scelta propriamente detto: Hilbert [85] ne distinguerà in effetti due forme, relative all'impiego che i diversi dominî matematici ne richiedono. Quella piú debole esige semplicemente che la funzione di scelta faccia corrispondere ad ogni insieme della famiglia su cui agisce un elemento che gli appartenga (e l'assioma che definisce ε è in questo caso sufficiente). Ma in altre situazioni si fa uso d'una sua forma piú forte, in cui il rappresentante deve esser coordinato univocamente all'insieme, indipendentemente dal modo in cui quest'ultimo è definito: si rende allora necessaria un'ipotesi supplementare, vale a dire $\forall x A(x) \Leftrightarrow B(x) \Rightarrow \varepsilon(A) = \varepsilon(B)$ [86], che è l'assioma dell'uguaglianza che abbiamo visto formulato da Bourbaki, per il quale, evidentemente, la distinzione appena accennata non ha ragione d'esistere.

Questa reviviscenza di τ non si riscontra nei precedenti scritti di Bourbaki: il simbolo, infatti, non compare né nella presentazione informale della teoria degli insiemi (dove è invece enunciato l'assioma della scelta con l'avvertimento che ogni suo futuro impiego in sede dimostrativa sarebbe stato debitamente segnalato), né in un articolo sui ' fondamenti ' [87], apparso una decina d'anni piú tardi, benché quest'ultimo non lesini originalità in materia di notazione (per altro quasi sempre accantonata nella pratica): in questo luogo, oltre all'assioma della scelta, Bourbaki assume il simbolo funzionale ι (seppure sotto diversa grafia). La decisione di far intervenire τ appartiene dunque per

[85] Cfr. Hilbert, *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, « Mathematische Annalen », CII (1929).

[86] Hilbert collega quest'assunzione al mutamento del genere delle variabili (per esempio nel caso del teorema del buon ordinamento e in dimostrazioni d'incommensurabilità nella teoria della misura): x rappresenta allora una funzione di variabile numerica, al pari di $\varepsilon(A)$ ed $\varepsilon(B)$, mentre l'uguaglianza in questione sta a significare concordanza per ogni argomento.

[87] N. Bourbaki, *Foundations of Mathematics for the Working Mathematician*, « Journal of Symbolic Logic », XIV-1 (1949). Di τ non viene fatta menzione neppure in un articolo dello stesso anno (*Sur le théoreme de Zorn*, « Archives Mathématiques »), nel quale Bourbaki elenca i teoremi che equivalgono all'assioma della scelta, dimostrando tale equivalenza.

intero all'impostazione degli *Éléments* e se il suo ruolo non sembra varcare i confini del primo libro, nondimeno questo ne riceve l'impronta caratteristica: τ sostituisce infatti l'assioma della scelta pur permettendo la dimostrazione del teorema di Zermelo sul buon ordinamento e quello di Zorn sull'elemento massimale (che gli sono equivalenti); da τ e dall'assioma di estensionalità si deduce poi l'esistenza dell'insieme vuoto, definito dal termine $\tau_z(\tau_x(x \in Z) \notin Z)$.

Ma è nell'allestimento assiomatico che la sua azione risalta piú vistosamente; in effetti il formalismo ' mitigato ' che Bourbaki adotta nell'esposizione è destinato a mediare tra il puro gioco simbolico e le sue finalità di comunicazione: entrambi possono allora venir assunti come ' significati ' a cui il testo rinvia. Nel primo caso gli assiomi espliciti della teoria (che contengono solo variabili vincolate), quando vengano riportati alla loro scrittura per esteso, si riducono a mere combinazioni segniche in cui non compaiono in qualità di oggetti altro che ' posti vuoti '[88]: l'edificio insiemistico viene dunque eretto su figure sintattiche che non coinvolgono alcuna lettera ed in tal senso esso costituisce « una teoria *senza costanti* »[89]. Nel secondo la ' formalizzazione ' ha lo scopo di disciplinare la corrispondente teoria intuitiva: il riordinamento dei contenuti che essa attua può allora esser tale da determinare, per effetto di ritorno, degli spostamenti nelle risonanze intuitive che la teoria (quantunque semi-formalizzata) trascina con sé. Sotto questo aspetto τ agisce in senso eminentemente intensionale: ciò si è già visto nel caso dello schema dell'uguaglianza in cui l'equivalenza tra due proprietà era commisurata all'uguaglianza dei loro rappresentanti tipici; ma quand'anche intervenga un'ipotesi d'esistenza incondizionata (come può esser considerato l'assioma dell'insieme infinito), si tratta pur sempre d'ipostatizzare una proprietà, dal momento che un'attribuzione d'esistenza consiste nell'accordare un predicato al suo individuo caratteristico[90].

[88] Ossia i simboli $\square$, ' argomento ' di τ. Cfr. la precedente nota 79.

[89] Bourbaki, *Théorie des Ensembles*, E. II. 1. Nella teoria dei gruppi, per esempio, intervengono invece due costanti: il gruppo e la legge di composizione.

[90] Cfr. R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Parigi, Hermann, 1966, p. 40: « L'interesse dell'operatore di Hilbert è di fornire un procedimento perfettamente artificiale ma puramente meccanico per costruire effettivamente un oggetto di cui si sa *soltanto* che soddisfa a condizioni preliminarmente imposte (nel caso in cui tali oggetti esistano). (...) Come il Dio dei filosofi, l'operatore di Hilbert è incomprensibile e non si vede; eppure governa tutto, e le sue manifestazioni sensibili risplendono in ogni dove ».

D'altra parte, la dimensione propria a quella che rimane, in fin dei conti, una teoria dell'estensione, non tarda ad esser riguadagnata: è sufficiente trasportarsi su un diverso livello del discorso, ed addentrarvisi, per constatare il passaggio delle consegne. Cosí, mediante la qualifica di ' collettivizzante ' (attribuita ad una proprietà qualora esista un insieme che contiene tutti e soli gli individui che ne godono, e preposta a bandire le classi dall'universo del discorso) l'intensione è assoggettata ad un principio estensionale. Ma questo mutamento prospettico, che contraddistingue l'affrancamento della teoria dall'affettazione formalizzante (il ' manierismo ' a cui, in via di principio, è improntato il disbrigo dei fondamenti), si riscontra soprattutto nella presentazione delle nozioni pregnanti della teoria: applicazioni e funzioni sono definite attraverso ' grafi ', cioè estensionalmente, prefigurando con ciò un'analoga descrizione delle strutture (riportate anch'esse, come s'è visto, al loro significato insiemistico).

Per il resto l'impianto teorico ricalca quello classico: schema di selezione e riunione (riformulazione di quello fraenkeliano di rimpiazzamento), assiomi di estensionalità, d'accoppiamento, delle parti e — enunciato nel successivo capitolo — quello dell'infinito[91]. Tale collocazione è giustificata dalla sua consonanza con gli argomenti che vi si trattano: là s'incontrano infatti le nozioni di ordine e di preordine, con la loro ' restrizione ' ad un insieme, il che consente di riportarle a condizioni insiemistiche sul grafo corrispondente. Cosí facendo si antepone la definizione di una famiglia di strutture (altrove annunziata come ' fondamentale ') a quella del concetto generale in cui rientrano, ciò che non possiamo interpretare se non come un loro confinamento tra le propaggini della teoria degli insiemi, ovvero il mancato conferimento di una loro rilevanza teorica dotata di dignità autonoma, il primo libro costituendo una prefazione alle teorie matematiche propriamente dette. Ridimensionamento ancor piú accentuato è quello riservato alla struttura di reticolo, cui è dedicato un succinto sottoparagrafo (le operazioni di unione e intersezione insiemistica essendo state per altro introdotte nel capitolo precedente): la diffidenza bourbakista nei confronti della pregnanza del concetto è, del resto, un fatto risaputo. Nell'ambito degli insiemi ben ordinati vengono poi dimostrati il principio di ricorrenza tran-

[91] L'assioma della coppia (ordinata) che compare nell'edizione del 1954 è in seguito reso superfluo dall'adozione della definizione di coppia alla maniera di Kuratowski: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

sfinita, il teorema di Zermelo e quello di Zorn. Seguono i cardinali (definiti applicando τ alla proprietà di 'essere equipotente') e quindi gli interi (individuati da una condizione sul calcolo dei cardinali). Dopo aver esposto alcuni frammenti dell'aritmetica e del calcolo combinatorio, Bourbaki formula la definizione d'insieme infinito e ne enuncia l'assioma d'esistenza ('presumibilmente indipendente' da quelli che l'hanno preceduto). Il capitolo si conclude con brevi cenni sul calcolo dei cardinali infiniti (relegato in massima parte tra gli esercizi) ed un paragrafo, al contrario piuttosto particolareggiato, che tratta dei limiti proiettivi e induttivi, ancora nozioni che entreranno a far parte del repertorio categoriale.

Questo è, nei larghi tratti, il contenuto della *Théorie des Ensembles* di Bourbaki: esaminandone la ripartizione in capitoli, abbiamo creduto di poterne evincere le differenti motivazioni 'retoriche' che possono esser riepilogate come segue. Nel primo capitolo vengono proposte delle convenzioni di cui ci si disinteresserà proporzionalmente al progredire del trattato, fino a vederle scomparire pressoché completamente al di là del primo libro: ben piú che prescrizioni esse rappresentano dunque enunciazioni di principio, ovvero anche le concessioni ultime che Bourbaki accorda alla deontologia formalizzatrice. Il secondo esibisce il nucleo teorico che sta a fondamento dell'edificio, introducendo le nozioni di base e le loro figure caratteristiche che saranno presupposte dalle teorie concernenti forme oggettuali piú evolute. Nel terzo viene presentata una delle 'strutture madri': evidentemente troppo elementare per richiedere una considerazione in proprio, essa chiarisce come la classificazione delle strutture in tipi irriducibili non corrisponda all'interesse che esse offrono in quanto oggetti d'un esame esclusivo. Se le strutture d'ordine acquistano cosí pregnanza solo allorché intervengano in dominî ottenuti per concrezione, intrecciandosi con strutture di natura diversa, la loro trattazione in questa sede, lungi dal costituire un'attribuzione di preminenza, appare piuttosto il disbrigo di un'incombenza tematica. Il capitolo conclusivo s'incarica della formulazione generale del concetto di struttura: vi è delineato, in uno schema unico, il modo di darsi degli oggetti matematici che saranno argomento delle successive teorie, le quali, innestandosi sull'impianto fornito loro dalla teoria degli insiemi, si configurano come sue diramazioni naturali. È appunto in quest'accezione minimale che essa assolve la mansione di fondamento: prospettando la forma primitiva, priva di specificazioni, dell'oggetto matematico in generale. Il capitolo delle strutture funge cosí da spartiacque tra l'elementare e il complesso, benché quest'ultimo non vi sia presentato se non in forma embrionale, l'eterogeneità dei casi che questa è destinata a sussumere sconsigliandone l'elezione a tema di un'indagine diretta. Ci si limita allora ad approntare una topica, in cui accanto alle nozioni d'uso come struttura e morfismo (che richiedono una sorta d'attualizzazione per poter offrire l'appiglio all'argomentazione teorica), ne compaiono altre (segnatamente quella di applicazione universale) che, pur esprimendo situazioni generali, ossia rintracciabili in ambiti differenti, sembrano ambire ad una dimensione che travalica quella meramente descrittiva [92].

Si tratta tuttavia di un'iniziativa isolata: la funzione del capitolo resta infatti quella di scomporre nelle sue componenti elementari ciò in cui si è riconosciuto consistere il meccanismo comune ai diversi dominî matematici, senza che ciò si accompagni ad altri obiettivi chiarificatori. Del resto non ci si preoccupa neppure d'imbastire una classificazione sistematica delle strutture che possa giustificare, dall'interno della teoria, quella divulgativa (o, quanto meno, corrisponderle).

Se allora cercassimo la dislocazione delle cosiddette strutture madri tra i volumi degli *Éléments*, non ricaveremmo alcuna traccia che possa far pensare ad una loro condizione paritaria: quelle d'ordine, come s'è visto, sono rincantucciate tra i fondamenti; se nell'introduzione del secondo libro ci è poi detto che quelle algebriche non sono altro che insiemi dotati di una o piú leggi di composizione, il termine — per quanto il capitolo d'apertura gli sia intitolato — non ha impiego matematico, a meno di non riconoscervi il riepilogo degli argomenti. Le strutture algebriche, infatti, non vengono mai esaminate in quanto tali, ma solo in riferimento ad una qualche loro forma piú determinata: l'unica nozione che le riassuma, seppur parzialmente, è forse quella di ' magma ', di cui si passano in rassegna alcune proprietà; ma essa, contemplando una sola operazione, non copre che casi particolari (in sostanza i monoidi e i gruppi). Sicché soltanto le topologie paiono avere un preciso riscontro nel testo, essendo definite da un sistema d'assiomi e costituendo pertanto l'argomento d'una teoria. Non è forse casuale che al momento della pubblicazione del fascicolo consacrato alle strut-

92 In tal senso la nozione di applicazione universale può essere interpretata come l'unico esempio di utilizzazione teorica esplicita del concetto di struttura nella sua accezione piú comprensiva (anteriore, cioè, al suo articolarsi in forme determinate).

ture gran parte dell'opera bourbakista fosse stata già stampata: le teorie lungo cui il trattato si dispiega investigano in effetti questa o quella particolare specie di struttura, senza che né il loro 'stato comune' né la loro rigida risoluzione insiemistica entrino in gioco se non come aleatoria figura d'equilibrio od implicito sistema di riferimento.

L'impressione che si ricava è insomma quella di un contrasto tra i due ordini del discorso: nel primo, è vero, si prospetta ciò che sarà l'orizzonte comune delle teorie matematiche, ma gli oggetti di queste ultime attingono altrimenti le loro determinazioni specifiche. Ciò che di essi realmente conta non sono infatti gli ingranaggi interni, bensí le prestazioni che offrono, grazie a cui si guadagnano vasti territori del sapere.

Se il progetto bourbakista intendeva ratificare il processo evolutivo della scienza che ha condotto a configurare gli insiemi come sostrato delle forme matematiche piú complesse, l'essenziale è che la matematica si lasci esprimere in un quadro concettuale omogeneo, di cui — al di là dei criteri d'opportunità estetica — poco importa quale sia il protocollo effettivo: sotto questo rispetto anche la formulazione informale della teoria degli insiemi funzionava egregiamente, perché nella pratica, per dirla con la parole di Dieudonné [93], « i matematici non si preoccupano affatto del sistema di Zermelo-Fraenkel. Oggi, quando scrivono un'opera di matematica, qualunque essa sia, essi utilizzano puramente e semplicemente l'antico e semplice linguaggio degli insiemi di Cantor ».

La fabbrica dei fondamenti che nei fatti ci viene prospettata ottempera dunque ad un'esigenza eminentemente retorica: ad essa spetta infatti di sancire l'autonomia della matematica, allontanata dalle aporie epistemologiche senza pericolo di ricaduta. D'altra parte la forma astratta dell'oggetto matematico in quanto struttura è letteralmente tale, nell'accezione piú classica dell'epiteto, dal momento che essa non dice nulla di piú di ciò che l'analisi dei casi 'concreti' non abbia desunto, isolandone le caratteristiche comuni: ai fini della coerenza espositiva la sua formulazione rappresenta forse un passo obbligato, ma la sua funzione pare limitarsi a quest'unica circostanza.

Il primo libro degli *Éléments* differisce cosí dai restanti nei propositi, nei contenuti e perfino nello stile; l'istanza fondatrice e quella organizzatrice appaiono pertanto irrimediabilmente scisse: se nella seconda una 'genealogia' dell'oggetto matematico è presupposta, ciò ovviene,

[93] Dieudonné, *Logica e matematica nel 1980*, cit., p. 19.

come s'è visto, in senso debole, mentre il suo adempimento reale si consegue per altre vie, cioè esibendo concretamente la ristrutturazione di zone teoriche, la quale viene ridisegnando lo scenario del sapere, rivelando trame regolari ed un'ordinata disposizione d'insieme.

Né il discernere i criteri con cui quest'operazione è condotta, né lo stimare la sua portata complessiva rientrano tra le ambizioni di questo scritto. Nell'elezione degli argomenti, nell'esclusione di altri (o nella loro riapparizione tra le pieghe d'una diversa circoscrizione teorica) intervengono fattori complessi: attestazioni di merito o d'irrilevanza (è il caso dell'algebra universale o delle teorie ' astratte ' della misura), calcoli di convenienza (allorché una teoria come quella dei gruppi finiti si mostra recalcitrante verso una sua riformulazione ' standardizzata '); è pertanto difficoltoso scorgervi volta per volta l'inefficacia del metodo, l'espressione di un'idiosincrasia o, specularmente, l'accreditamento di un determinato programma di ricerca. Lo stesso tipo di considerazioni si ripropone guardando all'assetto interno che le singole teorie presentano in seguito al trattamento bourbakista, nell'alterazione che le loro fisionomie tradizionali subiscono quando teoremi che altrove avevano presentato un punto d'arrivo dello sviluppo di quelle vengono ora trasformati in definizioni iniziali [94], od altri, a cui la storia aveva attribuito la piú grande importanza, son confinati tra gli esercizi [95], perché non piú congeniali al tracciato ' razionalizzato ' della teoria (in consonanza con l'enfasi efficientistica di cui si è riferito); o ancora quando delle nozioni vengono trasfigurate rispetto alla loro ordinaria definizione senza alcuna ragione (localmente) plausibile, salvo poi ravvisarvi lo schiudersi di un varco utile al loro intervento in un'altra regione teorica.

Spetta evidentemente ai matematici giudicare fino a che punto questa ridistribuzione dei contenuti determini un funzionamento migliore delle teorie che li ricevono, e piú in generale spetta a loro giudicare la bontà della ricompaginazione del sapere effettuata da Bourbaki, giacché la sua natura è tale da vanificare ogni metro di valutazione della sua efficacia e legittimità che non sia quello fornito dalla matematica stessa. Tuttavia, proprio all'interno di questa giurisdizione, il consenso è lon-

[94] Si veda al proposito l'articolo di G. Choquet *L'Analyse et Bourbaki* (« L' Enseignement Mathématique », 1962) in cui sono circostanziate alcune situazioni di questo tipo.

[95] Sorte ingrata, di cui si troverà una nutrita casistica nell'articolo di R. Queneau *Bourbaki et les mathématiques de demain* (« Critique », 1962).

tano dall'essere unanime e due, almeno, sono i motivi d'insoddisfazione che, guardando all'impresa bourbakista come al tentativo di stabilire un ponte di raccordo tra la matematica elementare e quella avanzata, ovvero considerando sorpassato il presupposto metodologico concernente i rapporti tra matematica pura e applicata su cui quella si fondava, sembrano decretare l'obsolescenza del progetto.

Per quanto solo una grande familiarità con le vicende degli ultimi trent'anni consentirebbe di misurare con precisione l'impatto o, almeno, l'accondiscendenza dell'allestimento bourbakista nei confronti delle teorie in fase di sviluppo, talune zone di scollamento appaiono evidenti: come vocabolario della ricerca esso sembra in effetti inadeguato ai progressi intervenuti, per esempio, nella geometria algebrica, la quale — giunta ad un determinato livello di raffinamento dei suoi metodi — sembra parlare un'altra lingua (nonostante che tra i protagonisti di questo rinnovamento si annoverino studiosi di provata militanza bourbakista).

Non sembra, tuttavia, che alla circostanza venga attribuito un peso eccessivo: cosí, se sentiamo Dieudonné ammettere che la nozione di struttura « è stata soppiantata da quelle di categoria e di funtore, che la includono in una forma piú generale e conveniente » [96], adombrando la necessità d'introdurre qualche aggiornamento nel trattato, la cosa non ha, fino ad ora, avuto alcun seguito ed essa non assumerebbe comunque le sembianze di un rifacimento radicale, perché — secondo il parere dello stesso Dieudonné — gli argomenti che vi sono riportati [97] costituiscono « nel senso etimologico, la parte *classica* della matematica, che serve da base a tutto il resto dell'edificio » [98]: le discipline, cioè, che si possono ritenere ' canonizzate '. D'altronde, in un testo destinato a fornire la sinossi dei temi trattati dal seminario che il gruppo organizza in piú sedute annuali dal 1948 (ricuperando sorprendentemente la forma espositiva da cui i suoi membri fondatori presero le mosse, ma soprattutto le distanze, agli inizi della loro carriera), Dieudonné le rubrica nella zona d'interesse nullo (come attuali campi d'indagine) all'interno del quadro riassuntivo della matematica ' bourbakista ', suddiviso appunto in fasce

[96] *The Work of Nicholas Bourbaki*, cit., p. 138.

[97] Quelli, per lo meno, che compongono la prima parte del trattato (*Les structures fondamentales de l'Analyse*), ossia la teoria degli insiemi, l'algebra, l'integrazione e lo studio delle funzioni reali.

[98] Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures: la choix bourbachique*, Parigi, Gauthier-Villars, 1977², pp. XIV-XV.

di rilevanza, proporzionali alla frequenza di un argomento rispetto a quelli dibattuti nel seminario, le quali (pur nella loro ' imparzialità ' statistica) costituiscono un implicito giudizio di valore per le teorie che vi compaiono [99]; all'infimo grado della classificazione son cosí collocate quelle giudicate definitivamente concluse, e di fronte alle ricerche che in proposito vengono ancora portate avanti, Dieudonné si limita a constatare « il curioso fenomeno storico della divisione della scienza in due parti che, in pratica, s'ignorano vicendevolmente » [100], il che può far pensare dunque a tutto fuorché all'urgenza di una revisione dei ' fondamenti '. La teoria delle categorie, per altro, sta appena sopra il livello di guardia.

L'altra circostanza che concorrerebbe a datare il programma bourbakista si fonda su ragioni ben piú insidiose, giacché a venir ridiscussa è la legittimità del suo obiettivo di fondo, piuttosto che la modalità di realizzazione: l'ideale di una matematica chiusa in se stessa e dedita unicamente (in una contemplazione quasi estetica) a badare al proprio ordine interno o ad inseguire la soluzione dei soli problemi che, autonomamente, essa stessa genera, non sarebbe piú condivisibile — si dice — perché incapace di far fronte ai termini reali della domanda delle scienze empiriche, segnatamente alle sollecitazioni provenienti da uno sviluppo tecnologico che richiede una connessione sempre piú stretta (e d'innesco pressoché immediato) tra ricerca e applicazione. Il pragmatismo con cui i bourbakisti ne configuravano i rapporti (ossia la separazione) non corrisponderebbe piú, in altre parole, alla realtà della pratica scientifica: e ciò non rappresenta semplicemente il deteriorarsi di un assunto epistemologico isolato, ma si traduce invece in una perdita d'interesse delle finalità ' unificanti ' che il progetto perseguiva e, piú in generale, in un ripensamento della funzione del metodo assiomatico e del significato stesso della parola ' problema matematico ' [101].

[99] Simili criteri di rilevazione statistica (come registrazione obiettiva dei dati della realtà scientifica) sono tra i preferiti da Dieudonné: è ricorrendo ad essi, infatti, che in uno scritto già citato si ' liquidano ' i tabú dell'intuizionismo (cfr. *Logica e Matematica nel 1980*, p. 23).

[100] Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures*, cit., p. XV.

[101] In effetti, adeguando esclusivamente al proprio respiro interno la cernita dei compiti a cui dedicarsi, la matematica corre il rischio di annalzare monumentali edifici che si rivelano inusufruibili per l'eccessiva generalità dell'impostazione (non essendo quest'ultima sottoponibile, per principio, ad alcuna procedura di controllo ' esterno ').

Si vedano in proposito G. Israel e L. Lombardo-Radice, *Alcune recenti linee*

Seguire nel dettaglio gli argomenti di questa critica ci condurrebbe troppo lontano; ciò che vogliamo ritenere qui è il rilievo che (qualora le cose stessero davvero in questi termini) verrebbe ad assumere ciò in cui non avevamo potuto riconoscere altro che un'enunciazione accessoria, ovvero ' epistemologica ', del bourbakismo e su cui ora sembrano invece gravitare le sorti stesse dell'edificio. Inoltre, la decadenza di quell'assunto preliminare trascinerebbe con sé tutta una serie di fattori periferici: cosí, se il rifiuto pregiudiziale d'ogni commistione tra i diritti della matematica pura e di quella applicata rappresenta un dato storicamente superato, vengono meno anche le ragioni, per esempio, di quella riforma didattica che, come propagazione o verifica ideologica, i bourbakisti vennero proponendo negli anni Sessanta, e la cui caratteristica piú appariscente consisteva nell'eliminazione della geometria ' analitica ' come materia d'insegnamento per sostituirla piú convenientemente con l'algebra lineare a cui è riducibile e, di fatto, ridotta negli *Éléments*: proposta affatto congeniale allo spirito del bourbakismo, preoccupato com'è di rimuovere ogni forma d'intuizione sensibile e, con essa, ogni via d'accesso privilegiato alla realtà esterna, in nome dell'esercizio raziocinante ' puro ' [102].

Ma quand'anche tutto ciò fosse concesso, nell'ambiziosa impresa di promuovere una palingenesi del sapere, nella sua stessa incompiutezza, resta qualcosa di grandioso: forse, proprio le ferite che il tempo vi ha prodotto.

5. - Tra le brume dell'ideologia.

Se delle prove sostanziali che possano accreditare la validità del programma bourbakista esistono, esse si riassumono in un motto che

di tendenza della matematica contemporanea (in *Storia della Scienza*, a cura di M. Daumas, vol. II, Bari, Laterza, 1969); G. Israel, *Un aspetto ideologico della matematica contemporanea: il bourbakismo* (in Aa. Vv., *Matematica e fisica: struttura e ideologia*, Bari, De Donato, 1977); G. Israel, *" Rigore " e " assiomatica " nella matematica moderna* (in Aa.Vv., *Scienza e storia: analisi critica e problemi attuali*, Roma, Editori Riuniti, 1980).

[102] Si veda in proposito J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géometrie élémentaire*, Parigi, Hermann, 1968[3]. Nei riguardi dell'eliminazione della geometria dall'insegnamento (e piú in generale nei riguardi del ' modernismo ') si vedano le penetranti critiche d'ordine sia epistemologico sia pedagogico formulate da R. Thom nell'articolo *Les Mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?* (« L'âge de la science », III, 1970).

Dieudonné ama ripetere senza timore di smentita: « nuove idee, nuovi risultati e nuovi metodi sono comparsi piú numerosi tra il 1940 ed oggi che non tra Talete e il 1940 » [103].

Fino a che punto il gruppo, in quanto tale, ne abbia avuto parte diretta, è tuttavia difficile a stabilirsi: occorrerebbe mettergli in conto l'autorevolezza personale dei suoi membri ed il reclutamento di giovani talenti (poi convenientemente istradati), o limitarsi piuttosto alla nuda funzione edificante degli *Éléments*? Certo è che neppure i suoi detrattori mettono in dubbio l'importanza dei successi conseguiti dall'approccio strutturalista [104], inteso non nell'accezione riduttiva di risistemazione dell'esistente, ma in quella ove si guadagnano i meccanismi di un'unificazione effettiva (in quanto immersa nel vivo dello sviluppo), allorché il trasferimento di metodologie ad un contesto diverso da quello in cui inizialmente erano apparse si traduce in una loro fecondazione reciproca [105]: in tal senso l'impostazione bourbakista, stabilendo indirizzi di priorità, avrebbe funzionato da levatrice del progresso.

Ma l'influenza del gruppo si è prodotta anche in un ambito che non sapremmo qualificare se non ideologico: rivolgendosi alla comunità matematica nel suo complesso e dispensandole una sequela di ' certezze ', Bourbaki si prefigge in effetti l'instaurazione di una nuova coscienza collettiva, ciò che Paul Scheurer ha chiamato anche « epistemologia naturale » (o ancora *naïve*) dell'uomo di scienza, riconoscendovi l'opaco sistema di stereotipi di cui costui per lo piú s'accontenta, rappresentandosi attraverso quello l'immagine della propria attività [106]. Se, sul piano sociologico, « i corsi e i manuali » restano il veicolo fondamentale della fortuna di un ' paradigma ', rimane infatti come rumore di fondo questa filosofia spicciola di cui il prodotto scientifico non è in grado di farsi

103 Dieudonné, *Logica e matematica nel 1980*, cit., p. 25.

104 Israel, per esempio, annovera l'algebra multilineare, quella omologica, la topologia algebrica, la geometria ' analitica ' (come studio delle varietà analitiche) tra i settori « in cui piú vivamente si è esercitata l'influenza ideologica del gruppo a livello della ricerca scientifica, [per quanto] i maggiori successi si [siano] avuti nel campo della geometria algebrica e dell'algebra commutativa, con un vero e proprio rivoluzionamento di queste branche » (*Il bourbakismo*, cit., p. 68).

105 A proposito di queste figure d'intreccio e del loro intervento nello sviluppo della matematica si veda lo scritto di J. Dieudonné *Remarks on Algebra, Topoloy and Analysis*, « Historia Mathematica », II (1975).

106 Cfr. Paul Scheurer, *Révolutions de la science et permanence du réel*, Parigi, P. U. F., 1979 (pp. 18-19).

carico: e non è forse il quadro piú rassicurante possibile dell'attività matematica quello che i bourbakisti hanno sempre inteso fornire nelle loro prese di posizione sulle finalità e i valori della disciplina e sui suoi rapporti con le altre scienze, escludendo ogni diritto d'ingerenza di ragioni ' epistemologiche ' nella gestione delle faccende matematiche? Perché quand'essi si cimentano su questo terreno, lo fanno per rimuovere i fattori di disturbo, scegliendo semplicemente gli argomenti piú persuasivi per confutare le opinioni contrarie: non esiste infatti nelle loro arringhe una qualche conclusione ' in positivo ', al di là di vaghe enunciazioni di principio che sembrano fatte apposta per essere ricevute, per dirla con Scheurer, in forma di mito. Del resto, sarebbe fuor di luogo volerne districare una versione piú elaborata, ché essa contravverrebbe agli scopi a cui quelle perorazioni sono destinate: suffragare la convinzione che la matematica basti a se medesima.

Cosí, apprestandoci alla ricerca della risonanza epistemologica del bourbakismo, già ' al buio ' non potremmo aspettarci gran cosa dalle interpretazioni agiografiche del fenomeno: la lezione che se ne può ricavare, una volta che si sia condivisa quella che i bourbakisti si dettero pena di formulare in proprio, non sembra in effetti avere molti argomenti a disposizione, soprattutto quando nei confronti delle tematiche classiche (rapporti tra matematica e realtà, problema dei fondamenti, natura delle entità matematiche ovvero modalità della loro ' apprensione ') la loro posizione è apertamente rinunciataria. La povertà di queste ' filosofie ' sembra cosí costituire, come per una sorta d'aspirazione alla sobrietà, una loro prerogativa interna [107] e, in ogni caso, in quanto a

[107] Valga per tutti l'esempio di Daniel Lacombe: in un primo tempo (*Sur la méthode extensive en métamathématique*, « Revue Scientifique », LXXXV, 1947), forse sopravvalutando il significato della redazione informale della teoria degli insiemi da parte di Bourbaki, egli scorse nelle definizioni ' estensionali ' delle nozioni matematiche il declinare dell'interesse di un approccio ' metafisico ' al loro riguardo: cosí la relazione, ' concretizzata ' come collezione di coppie ordinate, acquisisce un senso generale preciso di cui gli insiemi forniscono il quadro di riferimento intuitivo e diviene l'oggetto di uno studio matematico « indipendentemente da ogni sistema filosofico o logistico ». Successivamente (*Les idées actuelles sur la structure des mathématiques*, in Aa. Vv., *Notion de structure et structure de la connaissance*, Parigi, Albin Michel, 1957) Lacombe amplifica invece la portata della versione ' formalizzata ' (pur avvalorando l'opinione bourbakista che ne separa l'esistenza di principio dalla realizzazione effettiva e dal suo impiego pratico), rinvenendovi la soluzione del problema dei fondamenti, sia pure « in senso ristretto », la porzione elementarissima dell'aritmetica richiesta per definirne la sintassi trasportando di per sé il sistema al riparo da ogni contestazione possibile:

panegirici, i bourbakisti se la cavano egregiamente da sé, per quanto sia rimasto in pratica il solo Dieudonné a sostenere pubblicamente le ragioni del gruppo.

I suoi interventi recenti, d'altra parte, si limitano a ribadire tesi arcinote, ovvero, piú dettagliatamente: che la logica e la teoria degli insiemi sono state riordinate da tempo e fanno fronte a tutte le necessità dei matematici; che esse forniscono una sorta di grammatica che, come tale, resta implicita nel loro lavoro, eccettuato ovviamente quello degli specialisti che le assumono come tema d'indagine; che, tuttavia, questi ultimi lavori (ed a maggior ragione quelli in cui s'escogitano bizzarre teorie logiche come quelle modali o trivalenti) non hanno alcuna rilevanza in sede matematica, nel senso che i loro risultati non intervengono in merito alla conduzione ordinaria del ragionamento, il che conduce a constatare la separazione completa di queste discipline dal resto della matematica (la stessa 'pretesa' crisi dei fondamenti non vi si sarebbe avvertita se non assai debolmente, riducendosi ad una serie di difficoltà d'ordine linguistico che non compromisero uno sviluppo teorico particolarmente rigoglioso); che, quanto al sistema che comunemente s'impiega nella pratica (ossia quello di Zermelo-Fraenkel), la sua coerenza è solo verosimile, ovvero riposa sul suo valore d'uso, il che — per converso — permette di qualificare l'intuizionismo come un'eterodossia, rilevandone statisticamente la misura dell'intervento nella pratica matematica; che il formalismo consiste nel riportare la matematica ad un sistema segnico regolamentato con precisione, al quale è sufficiente riferirsi prescindendo da ogni congettura attorno a ciò che esso è destinato a rappresentare; che al proposito (proprio perché ininfluente sulla correttezza del testo) è concessa l'assoluta libertà d'opinione, il sistema formale costituendo, per cosí dire, la moneta di scambio tra intuizione e intuizione [108].

Ma sussistendo una tale disparità d'interessi, l'assimilare logica e teoria degli insiemi alle restanti discipline della matematica, facendo delle prime l'argomento e s c l u s i v o dell'epistemologia, costituisce un vizio di procedura di cui Dieudonné lamenta, non senza ragione, la scon-

al contempo la matematica risulterebbe 'fondata' indipendentemente da ogni presupposizione d'ordine filosofico.

[108] Al proposito di tutti questi topici si vedano gli scritti di Dieudonné *Logica e Matematica nel 1980*, cit. e *Bourbaki et la philosophie des mathématiques* (« Epistemologia », IV, 1981).

veniente perseveranza, benché — sul versante opposto — al dovere di misurarsi con le idee portanti dello sviluppo della matematica contemporanea non s'accompagni, al di là della menzione di chi (forse unico nella storia della filosofia matematica) s'arrischiò nella difficile impresa [109], alcun obiettivo definito.

Spetta evidentemente al filosofo darselo, ammesso che mai esista: ciò che Dieudonné sembra prefiggersi è soltanto di prospettargli uno sterminato campo d'indagine attraverso la semplice ricusazione di quello di cui finora s'è recidivamente occupato ed in proposito (pur lasciando da parte la legittimità del divorzio che va predicando) non si potrebbe esagerare l'importanza dell'opera di storico che, con rara erudizione, ha svolto inerentemente a numerosi settori della matematica moderna, offrendo allo studioso un prezioso materiale d'orientamento e di riflessione [110].

Resta il fatto che il bourbakismo non sembra aver interessato gli epistemologi, forse scoraggiati dalla perentorietà delle sue dichiarazioni di principio. Certo essi avrebbero potuto trascurarle e, dedicandosi allo studio del lavoro scientifico del gruppo, derivarne una lezione meno mortificante. Ma non abbiamo notizia di nulla del genere: da una parte le interpretazioni in chiave critica, limitandosi ad assumerlo come occasionale (e spesso grottesco) bersaglio polemico per screditare il metodo assiomatico, non sembrano prometterne una migliore comprensione; dall'altra, l'unica speculazione 'positiva' del bourbakismo che non si riduca alla dimensione semplicemente divulgativa, precisamente da quest'ultima prende le mosse, imbastendo un intero capitolo di teoria della conoscenza su alcuni frammenti di ciò in cui abbiamo rinvenuto la rudimentale epistemologia 'propositiva' del gruppo, contribuendo con ciò a propagandarne gli aspetti piú palesemente 'ideologici' (nel senso di Scheurer) [111].

[109] Certamente unico Albert Lautman è in quanto filosofo verso cui Dieudonné ostenti pubblicamente ammirazione: si veda in proposito l'*Avant-propos* di quest'ultimo alla raccolta di scritti di Lautman *Essai sur l'unité des mathématiques*, Parigi, Union Générale d'Editions, 1977.

[110] Si vedano per esempio: Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, vol. I: *Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique*, Parigi, P. U. F., 1974; Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Amsterdam - New York - Oxford, North-Holland Mathematical Studies n. 49, 1981; Dieudonné (direttore dell'opera) e altri, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, 2 voll., Parigi, Hermann, 1978.

[111] Preferiamo qui evitare d'addentrarci nel labirinto degli strutturalismi. La

Contentandosi in effetti della versione didascalica del bourbakismo, Piaget ne desunse l'emblema delle strutture madri per farne l'oggetto di un'indagine psicologica, ritenendo evidentemente con ciò di convalidare sperimentalmente un ' paradigma '; e finché si fosse trattato semplicemente di stabilire se e fino a che punto quelle corrispondano ad una qualche intuizione ' profonda ', ovvero siano radicate nell'intelligenza spontanea del soggetto, dando per buona la correttezza della procedura d'accertamento, nessuno avrebbe avuto alcunché da recriminare, giacché la natura stessa dell'argomento sembra suggerire un'interpretazione di questa sorta (basti pensare all'impiego intuitivo, anteriore, cioè, ad ogni elaborazione matematica, delle ' idee ' di operazione, ordinamento, continuo [112]: la psicologia genetica può, in tal senso, esser riconosciuta come la sede teorica meglio attrezzata per affrontare questioni del genere). Tuttavia non è solo di psicologia che qui si tratta, bensí di

matematica, infatti, sembra avervi ben poco da spartire, la matrice di quella corrente di pensiero dovendo esser ricercata piuttosto nella linguistica. Questa disciplina conobbe in effetti nella prima metà del secolo una rivoluzione metodologica che la condusse a conseguire un rigore sconosciuto alle altre scienze umane, divenendone cosí il modello di rinnovamento. Tuttavia, i tentativi piú o meno ambiziosi di caratterizzare il fenomeno nel suo complesso sembrano limitarsi per forza di cose ad abborracciarne qualche definizione generale che non promette nulla di buono. Piú interessante ci sembra invece ispezionare caso per caso le modalità del trasferimento (o plagio) epistemologico attraverso cui le varie scienze tentarono di trapiantare l'approccio strutturale della linguistica nel proprio campo d'indagine: esaminata in concreto, la traduzione del ' paradigma ' appare allora estremamente problematica (cfr. G. Mounin, *Introduction à la semiologie*, Parigi, Les Éditions de Minuit, 1970; trad. it.: Roma, Ubaldini, 1972). Quando poi il suo precipitato finisce in bocca alla filosofia, esso si riduce ad una serie di ' innovazioni ' terminologiche (in cui il vocabolario matematico non è risparmiato: isomorfo, topologico, differenziale divengono altrettanti ' ornati ') che paiono piú vicine, nel loro meccanismo di formazione, ai motti di spirito che non alle ' propagazioni per similarità ' precedentemente descritte. Cfr. G. Deleuze, *Da che cosa si riconosce lo strutturalismo?*, in F. Châtelet (curatore), *La Filosofia del XX Secolo*, Milano, Rizzoli, 1976 (ediz. orig.: Parigi, Hachette, 1973). Il caso di Piaget, invece, si configura in termini diversi (nelle intenzioni, per lo meno): ciò che l'epistemologia genetica propone è infatti una congiunzione tematica tra discipline distinte che introduce indubbiamente un elemento di novità nella variegata casistica di quelle contaminazioni epistemologiche.

112 Cfr. l'Introduzione di Bourbaki alla sua *Topologie générale* (Parigi, Hermann, 1971): le strutture topologiche sono presentate come « quelle in cui ricevono un senso matematico le idee intuitive di *limite*, di *continuità* e di *vicinanza* » (*voisinage*: la traduzione italiana corrente (' intorno ') non sembra avere un'identica risonanza nel linguaggio comune). Basta evidentemente prescindere da questo senso per avere un buon argomento d'indagine psicologica.

epistemologia o, meglio, di quella sua variante che, della prima, rappresenterebbe il prolungamento naturale.

Le disquisizioni piagetiane in questo campo ostentano un caratteristico incesso: l'argomentazione, infatti, si svolge su due livelli, dei quali il primo, probatorio, è costituito dal materiale empirico raccolto dalla psicologia. Esso non interviene se non allusivamente nel testo (per lo piú attraverso una serie di rinvii bibliografici) e tuttavia fornisce la documentazione sperimentale su cui poggia per intero il secondo che, ritenendone esclusivamente i risultati, rappresenta la rilettura epistemologica di dati ' obiettivi ' i quali, appartenendo ad una diversa sfera di competenze, non son piú argomento di discussione. Ma l'operazione è tutt'altro che pacifica: innanzitutto perché il discorso, dispensato dall'allegare prove, anziché procedere con la circospezione propria di un Poincaré (il quale, pur seguendo l'esecrato approccio ' introspettivo ', si guadagnava onestamente la luce della verosimiglianza), si dipana qui apoditticamente attraverso topici la cui attendibilità non rientra tra le sue preoccupazioni. Questa circostanza non parrebbe dar adito se non a riprovazioni d'ordine stilistico che, in quanto tali, non ci dicono nulla riguardo alla bontà degli argomenti in causa ed anzi, tutto sommato, potrebbero venir infirmate proprio dalle pretese scientificizzanti di questa epistemologia. In che cosa consiste infatti la persuasività di un'asserzione epistemologica? Il preteso soggetto trascendentale, si sa, è un teste facilmente manipolabile: ci si rivolgerà allora all'intelligenza infantile la quale sembra promettere una deposizione piú sincera, purché (è ovvio) si sappia escutere avvedutamente.

Cosí, se i propositi dell'epistemologia genetica avrebbero potuto esser condivisi da Poincaré (rintracciare, alle origini dell'intelligenza naturale, la provenienza, ossia la possibilità stessa, della conoscenza matematica), il metodo è differente: qui non si tratta piú, infatti, di ipotizzarne piú o meno ingegnosamente la genesi, bensí di osservarla laddove si presenta di fatto, rinvenendo nelle condotte che (nelle diverse fasi del suo sviluppo intellettuale) il bambino mostra, destreggiandosi nella realtà, gli schemi attraverso cui (in modo spontaneo e irriflesso) esso coordina le proprie azioni e operazioni, schemi nei quali è riconoscibile un'organizzazione ben definita. Ma giacché tali strutture mentali agiscono a livello subliminale, esse si possono soltanto desumere dall'esame del suo comportamento, ossia sperimentalmente: ciò invece sembra precluso all'analisi introspettiva la quale, riferendosi unicamente al pensiero cosciente del soggetto (ed assumendo per di piú quest'ultimo allo stadio compiuto del suo sviluppo), non può avanzare che congetture riguardo ai modi d'acquisizione o al carattere innato delle sue facoltà cognitive, congetture che, viceversa, l'epistemologia genetica può sottoporre a controllo. Allora è chiaro a quale tipo d'impiego epistemologico essa si presta: se una qualche forma d'intuizione privilegiata di cui la matematica sarebbe beneficiaria è pretesa esistere, essa andrà ricondotta al momento della sua apparizione che — solo — può accertarne la natura.

Si viene in tal modo a sapere, per esempio, che i numeri naturali scaturiscono dalla sintesi di strutture molto elementari che compaiono piú precocemente ed appartengono al periodo delle cosiddette ' operazioni concrete ' (connesse essenzialmente alla manipolazione di oggetti); esse, intese ancora come attitudini o competenze intellettive, restano inizialmente vincolate ad un piano puramente qualitativo che ne limita in misura considerevole le possibilità combinatorie (solo una similitudine consentirà di riunire oggetti, mentre nel caso di ordinarli il confronto avverrà unicamente tra elementi ' contigui ', mentre la transitività si consegue solo passo dopo passo senza mai raggiungere la completa dominabilità del sistema). Ma una volta che il soggetto si renda capace di far astrazione dalle qualità dei termini componenti quelli che già fin d'ora si presentano come agglomerati conchiusi e regolati da leggi interne (cioè sia in grado di prescindere dalle circostanze concrete che ne stabiliscono il criterio di formazione), questi saranno affrancati dalle loro restrizioni e gli elementi considerati alla stregua di unità indiscernibili; le strutture che governano la classificazione (inclusione di aggregati di oggetti) e la seriazione (successione di relazioni asimmetriche) forniranno allora i materiali che, coordinati in un unico sistema, condurranno alla costituzione dei naturali. Il concetto di numero non può pertanto venir reputato idea primitiva, perché esso risulta il prodotto di una costruzione che coinvolge, trasferendoli ad un livello di generalità superiore ed articolandoli in un tutto, due fattori preesistenti; d'altra parte, la sua riconduzione unilaterale alla logica delle classi appare (dal punto di vista genetico) parimenti ingiustificata, dal momento che la serie numerica è generata dal concorso simultaneo e solidale sia della componente cardinale sia di quella ordinale.

Essendo poi le strutture banali che ne stanno alla base passibili di una descrizione matematica (che le riporta sotto un unico schema, detto ' raggruppamento ', una sorta di mala copia o versione embrionale di algebra di Boole), forse per corroborare la ricostruzione psicologica della genesi degli interi, i collaboratori di Piaget si son dati la pena di ' formalizzarla ', estinguendo le limitazioni caratteristiche dei due ' raggruppamenti ' coinvolti, combinandoli assieme e derivando dal sistema che ne risulta gli assiomi di Peano [113]. Lasciamo a loro la giustificazione dell'interesse che simili divagazioni deduttive possono offrire; ciò che vorremmo scandagliare è piuttosto l'operazione che vi è sottintesa, quella cioè che permette di condurre ad uno stesso ordine di realtà dati eterogenei, metamorfosi alquanto problematica che è poi proprio ciò che si perde nella transizione dallo sperimentale allo speculativo.

Sul piano metodologico solitamente Piaget prospetta l'impiego di nozioni matematiche in psicologia come un semplice ausilio descrittivo: esse permetterebbero di riorganizzare il materiale empirico e con ciò di chiarire i termini del discorso, stabilendo « con precisione la specificità di questa o quella struttura del pensiero reale nel suo sviluppo » [114]. Si giunge cosí alla ' formalizzazione ' di strutture che, come quella di raggruppamento, non sembrano presentare alcun rilievo matematico e tuttavia consentono di misurare il grado d'incompletezza rispetto ad altre che ne costituiranno un perfezionamento. Ma un conto, ci sembra, è esibire in funzione esplicativa un modello matematico con cui ' fissare ' i dati sperimentali; un altro è il procedimento inverso: cercare un modello concreto per questa o quella costruzione teorica che da strumento interpretativo si fa oggetto d'indagine, perché se i due momenti paiono interconnessi [115] non sono evidentemente la stessa cosa, soprattutto non quando si tratti non già di rintracciare le radici psicologiche di una nozione matematica immediatamente accessibile che, come quella di numero, compare distintamente al livello del pensiero cosciente, né di ricostruire le tappe che hanno portato alla sua acquisizione definitiva, bensí di localizzare nell'intelligenza naturale ciò che regressivamente l'analisi assiomatica ha derivato da un sistema evoluto di conoscenze,

[113] Si veda il resoconto datone da Piaget in E. W. Beth e J. Piaget, *Épistémologie mathématique et psychologie: essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*, Parigi, P. U. F., 1961, cap. XI (in particolare pp. 286-288). Questa e tutte le successive citazioni da quest'opera si riferiscono esclusivamente alla sezione redatta da Piaget.

[114] *Ibid.*, p. 274.

[115] In effetti nel primo è sempre presupposto (per quanto duttile possa risultare) il riferimento ad un quadro concettuale ben determinato: è in tal modo che si possono interpretare gli schemi dell'intelligenza infantile in termini di strutture. Nel secondo (se non altro per evidenti ragioni di coerenza) andrà tenuto conto di quanto l'indagine psicogenetica ha precedentemente stabilito.

che non ha corrispettivo mentale al di fuori di quello che lo psicologo gli attribuisce, deducendolo dal contegno operatorio relativo ad un determinato livello dell'intelligenza infantile.

Una procedura affatto singolare, dunque, che nondimeno pare esser quella adottata a proposito delle strutture madri di Bourbaki: ma se il protocollo sperimentale è congegnato espressamente per dar loro la caccia, non si può far a meno di chiedersi se e fino a che punto questo tipo di ricognizione, preorientando la consultazione dell'esperienza, non ne forzi in qualche modo il responso [116]. Che la faccenda non sia da poco risulta chiaro considerando che cosa da accertamenti di questa sorta s'intende ricavare e poiché l'ambizione sembra quella di trasfigurare sul ' concreto ' la tematica dei fondamenti, è evidente che l'assunzione di questo o quel termine di riferimento e la loro successiva collocazione in una scala di priorità genetiche avranno un peso epistemologico di notevole rilevanza.

Ma esaminiamo piú da vicino l'esegesi psicogenetica del bourbakismo. Come prima sintonizzazione essa cercherà uno *specimen* naturale per ciascheduna delle strutture madri: fin qui non si tratta altro che di vedere se nel pensiero infantile (o, piú propriamente, nei meccanismi immanenti al suo funzionamento, giacché è questo tipo di presenza che si dovrà appurare) esiste qualcosa che ' somigli ' loro. La corrispondenza è dunque analogica, la sola del resto che appaia plausibile, perché sarebbe incongruo — come Piaget si premura di dichiarare — pretenderne

[116] A questi appunti metodologici Piaget risponde sul terreno dell'aneddotica (cfr. *op. cit.*, pp. 181-182): in un convegno tenutosi nel 1952 a Melun sulle strutture matematiche e quelle mentali « senza conoscere a quel tempo i lavori di Bourbaki », egli avrebbe dissertato su tre tipi irriducibi di strutture mentali « osservate empiricamente nello sviluppo dell'intelligenza infantile » e sorprendentemente corrispondenti alla tripartizione di Bourbaki. Eppure nell'unico resoconto disponibile di quell'intervento (J. Piaget, *Le strutture matematiche e le strutture operatorie dell'intelligenza*, in Aa. Vv., *L' insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, 1960; ediz. orig.: Neuchâtel - Parigi, Delachaux & Niestlé, 1955) non solo le tesi di quello vengono assunte apertamente come termine di confronto, ma tutto appare squisitamente bourbakista: il linguaggio, le metafore (p. 5), perfino la riprovazione dell'uso smodato che talvolta si fa dei reticoli (p. 7). Che la primitiva versione dell'intervento abbia subito interpolazioni prima di venir pubblicata è in ogni caso una questione marginale, giacché (pur accantonando il fatto che il rilievo e p i s t e m o l o g i c o di quelle indagini è stato fatto riposare sul raffronto con la posizione di Bourbaki) lo stesso tipo di obiezioni si riproporranno qualche anno piú tardi quando l'epistemologia genetica affronterà la questione categoriale.

una ' puntuale ' che riportasse, termine dopo termine, un sistema d'assiomi alla certificazione dei fatti [117].

A che cosa riferire allora i sommi generi strutturali? Evidentemente a quelle coordinazioni dell'attività operatoria infantile che ne evochino in qualche modo le caratteristiche, e quelli che, in effetti, vengon proposti in qualità di loro rappresentanti sono ' sistemi ', ossia aggregati combinatoriamente chiusi la cui ' forma ' non dipende dalle operazioni concrete che essi riassumono (sia pure a titolo di possibili), giacché il soggetto ne ha interiorizzato il funzionamento e lo applica ad una molteplicità di situazioni distinte. Il loro grado di organizzazione interna, infine, si rivela qualitativamente superiore a quello che contraddistingueva la struttura di raggruppamento: cospicua è, in tal senso, la circostanza che tali sistemi abbiano guadagnato infine una reversibilità operatoria. Essa si manifesta in due fondamentali varianti: la prima consiste nell'annullare un'operazione facendola seguire dalla sua ' inversa ' e ristabilendo in tal modo la condizione iniziale; la seconda riguarda invece la ' reciprocità ' che sussiste ad esempio nella lettura in due sensi che un ordinamento consente.

Quale che sia la loro pregnanza psicologica [118], Piaget fa corrispondere i sistemi coinvolgenti queste due forme di reversibilità alle strutture algebriche e d'ordine rispettivamente, adducendo a conforto dell'interpretazione il fatto che tali sistemi si mostrano irriducibili gli uni agli altri (né si vede come potrebbe accadere altrimenti, a meno di non considerare la ' formalizzazione ' del livello di competenza da cui entrambi provengono — i ' raggruppamenti ' — come un loro precedente ' stato comune '), ma soprattutto indipendenti, nel senso che essi sono impiegati solo separatamente nello stadio delle operazioni concrete.

Quanto alla terza componente della classificazione bourbakista, i modi del suo reperimento paiono piú difficoltosi: ancora, occorre risalire alle diversificazioni che intervengono tra i raggruppamenti, rifacendosi questa volta alla dicotomia intercorrente fra aggregati discreti e continui (nella loro accezione ' ingenua '). Ci si rivolgerà tuttavia allo

[117] Cfr. Piaget, *Épistémologie mathématique et psychologie*, cit., p. 257.

[118] Perché qui piú che altrove par difficile districare la parte che spetta di diritto alle competenze infantili da quella da attribuire invece all'interpretazione psicologica, impegnata com'è a cercarne la traduzione matematica: le due forme della reversibilità forniscono infatti la mediazione analogica tra il comportamento operatorio del fanciullo e le nozioni della matematica scientifica, la ' formalizzazione ' di quello collimando con le strutture madri.

spazio r a p p r e s e n t a t i v o del fanciullo (sostanzialmente alla pratica del disegno interpretata come ‘ operazione ’ spaziale), e non già a quello percettivo in cui, evidentemente, le lunghezze si riconoscono. Si assiste allora allo sbozzamento di una sorta d'elementare gruppo topologico coi suoi ‘ invarianti ’ qualitativi (figure aperte o chiuse, vicinanza, sovrapposizione, interno ed esterno) che precede l'apparizione di quello corrispondente agli spostamenti euclidei o alle trasformazioni proiettive. L'ontogenesi cognitiva sovverte dunque la filogenesi ma seconda l'ordine teoretico.

Non vogliamo entrar nel merito dell'attendibilità e dell'interesse che la trasposizione brefomorfa della trinità bourbakista può avere nel campo della psicologia; ben piú impegnativa, in ogni caso, appare la sua mansione epistemologica.

In effetti, una volta reperite strutture mentali che rammentano, nel loro assetto interno, quelle matematiche, per ottenere qualcosa di epistemologicamente piú significativo occorrerà approfondire il paragone: le strutture madri sono allora assunte in blocco ed il termine di confronto diviene ormai la loro posizione strategica in seno al sapere in conformità al ‘ paradigma ’ bourbakista. L'analogia si sposta cosí, da settoriale qual era, a « globale o funzionale » [119]: non solo le strutture osservate ‘ in azione ’ nel pensiero infantile vi si configurano come primitive e distinte, ma l'acquisizione delle successive è scandita in termini di filiazione a partire da quelle. In ambedue i casi, dunque, fatte le dovute proporzioni, saremmo di fronte ai costituenti elementari sufficienti a ricoprire, per composizione o specificazione, gli ambiti di conoscenza di cui rispettivamente fanno parte. Ma mentre in matematica (ossia nella ricostruzione bourbakista) tutto ciò ha un senso ben definito, non accade altrettanto in psicologia, salvo non invocare nella formazione di una struttura operatoria piú elaborata l'intervento di questa o quella struttura primitiva unicamente perché la descrizione, ricalcata sul modello matematico, vi si attaglia. Le occorre, evidentemente, un'intermediazione analogica (fin qui, in effetti, non parrebbe trattarsi d'altro) che risulti piú soddisfacente dal punto di vista psicologico.

Lo schema esplicativo che Piaget escogita a questo riguardo si chiama ‘ astrazione riflettente ’: prossima, nella sua formulazione generica, ad una o forse a piú ‘ figure ’ della generalizzazione (quali si sono inventariate nel corso del primo capitolo), essa è preposta a render conto

[119] Piaget, *op. cit.*, p. 267.

del meccanismo mentale che consente di passare da una strutturazione equilibratrice ad un'altra che si configura come una sua rielaborazione o un suo compimento. Tutto ciò si compie tematizzando un sistema d'operazioni e proiettandolo su un piano superiore che in qualche modo lo integri (per esempio allargando il primitivo sistema, oppure combinandolo con altre operazioni o ancora facendo delle precedenti l'argomento di nuove). In effetti la generalità dello schema è tale da postularne l'intervento nei frangenti piú disparati, facendone in realtà il marchio di fabbrica dell'epistemologia matematica di Piaget. La sua originalità è quella d'aver interpretato la genesi delle conoscenze logico-matematiche in termini di un'esperienza *sui generis*, la quale non verte direttamente sugli oggetti, bensí sulle azioni che su di essi il soggetto compie, senza che si possa tuttavia parlare d'un cominciamento assoluto (essendo possibile risalire ai coordinamenti senso-motori e da questi in giú fino alle condizioni organiche della conoscenza). D'altra parte non si avrà neppure una limitazione verso l'alto, com'è facile prevedere: se, infatti, le azioni interiorizzate consentono ad un pensiero operatorio di emergere (dapprima lacunosamente nella forma di ' raggruppamento ', poi perfezionato nello stadio delle operazioni concrete) ed in seguito le operazioni forniscono il sostrato su cui viene erigendosi una combinatoria proposizionale (che, esordio del ragionamento ipotetico, mediante operazioni ' alla seconda potenza ' — che vertono, cioè sulle precedenti — coordina inversione e reciprocità in un unico sistema isomorfo al gruppo trirettangolo di Klein) e se ogni tappa di questo sviluppo è ricondotta alla medesima formula interpretativa in cui uno stadio acquisito rappresenta il materiale per la costruzione ulteriore, allora non v'è ragione che questa facoltà naturale si arresti qui anziché tramandarsi all'attività scientifica propriamente detta.

In effetti è ad un processo di questo tipo che Piaget addebita, ' naturalizzandola ', la transizione dalla matematica intuitiva a quella assiomatica e formale, ed anche l'operazione bourbakista (reperimento delle strutture piú generali attorno a cui le teorie matematiche si organizzano) è interpretata sulla stessa falsariga.

L'astrazione riflettente agisce dunque tanto nel senso della costruzione del complesso quanto in quello della regressione verso il semplice: sovrapposta al corso della storia ne diviene in tal modo il congegno propulsivo [120]. La ' rivoluzione assiomatica ' può allora dirsi legittimata

[120] Dall'onnipresenza di questo schema Piaget ricava una lezione prettamente filosofica improntata al costruttivismo (le acquisizioni piú tardive non essendo ' pre-

da un punto di vista naturalistico: se l'epistemologia tradizionale, giungendo a conclusioni opposte, s'era rassegnata a registrare la disparità tra due epoche della ragione apparentemente inconciliabili, Piaget le contrappone una soluzione genetica del problema che è in grado di colmare lo scarto esibendo nella versione infantile delle strutture madri il tramite privilegiato tra pensiero naturale e matematica pura.

D'altra parte l'impiego gnoseologico di una categoria psicologica riformula profondamente il grado di parentela che s'è rinvenuto al riguardo. Tra le strutture classificate da Bourbaki e le loro progenitrici (non si possono ormai interpretare diversamente) non c'è piú, infatti, una semplice convergenza analogica, giacché si tratta della stessa cosa: in un primo tempo spontanee ed implicite, in un secondo riflesse e trascritte nel linguaggio inequivoco della scienza, eccole elevate al rango di leggi del pensiero. La loro versione bourbakista costituirà allora il « prolungamento formalizzato » [121] di contenuti che sono patrimonio del « nucleo funzionale comune a tutti i soggetti individuali » [122] e che, in quanto tali, condizionano la pratica scientifica né piú né meno di come la vita sessuale dell'adulto è condizionata dalle sue fissazioni infantili.

La ricostruzione bourbakista, invero, s'è esercitata su un *corpus* di conoscenze preesistenti di cui è evidentemente impossibile compilare l'albero genealogico, ossia la trama ininterrotta di astrazioni che, raffinando le risorse del pensiero naturale, ha condotto a costituirlo. L'affinità stabilita tra lo sviluppo mentale del fanciullo e l'allestimento assiomatico di Bourbaki può tuttavia fornirne la scorciatoia: le strutture madri, infatti, in quanto fondamenti dell'edificio matematico, ne trasfigu-

determinate' dalle anteriori). La forza d'attrazione di questo procedimento esplicativo (e delle sue conseguenze epistemologiche) è tale da farlo intervenire anche nel campo della logica: in questo frangente Piaget, riferendosi ai teoremi di limitazione, non ne ricava semplicemente una corroborazione delle sue vedute antiriduzioniste, ma tende addirittura a fornire una 'spiegazione' psicogenetica dei risultati di Gödel (certo a cose fatte, ma come se, tutto sommato, ce li saremmo potuti attendere) attraverso un'argomentazione per nulla persuasiva che invoca la relatività delle nozioni di forma e contenuto ed adotta traslati di termini tecnici in campo psicologico. Cfr. Piaget, *L'epistemologia genetica*, Bari, Laterza, 1971, pp. 81-83 (ediz. orig.: Parigi, P. U. F., 1970).

121 Piaget, *Le strutture matematiche e le strutture operatorie dell'intelligenza*, cit., p. 11.

122 Piaget, *Les problèmes principaux de l'épistémologie des mathématiques*, in J. Piaget (direttore dell'opera) e altri, *Logique et connaissance scientifique*, Parigi, Gallimard, 1966, p. 577.

rano in forma astratta il processo costitutivo; d'altra parte esse collimano con i dati sperimentali relativi ai primordi dell'intelligenza operatoria. Ma se, come sembra ragionevole supporre, è unicamente da questa che la matematica è potuta scaturire (e se è vero che l'ordine della riflessione è inverso rispetto a quello della costruzione), allora le strutture madri costituiranno la via di raccordo attraverso cui l'ontogenesi della conoscenza può riallacciarsi alla filogenesi. La prospettiva bourbakista, pertanto, non avrebbe solo portato alla luce (come per una sorta d'inconsapevole reminiscenza) le radici psicologiche del sapere matematico, ma ne prefigurerebbe anche le modalità concrete di sviluppo, fornendo nella composizione e differenziazione delle strutture elementari il modello teorico del processo effettivo mediante cui il pensiero naturale è venuto erigendosi a scienza.

È dunque questa l'apologia piagetiana del bourbakismo. La stessa epistemologia genetica, tuttavia, ne risulta beneficiaria, dal momento che essa ora può — alla ' prova dei fatti ' — presentarsi come la disciplina capace di risalire alle fonti della conoscenza, di cui la filosofia si limitava a considerare soltanto gli stadi evoluti, ovvero (come adesso possono venir chiamati) « alcune *risultanti* » [123].

Resta da chiedersi quali sarebbero state le conseguenze di un responso sperimentale sfavorevole al ' paradigma bourbakista ': l'alternativa verteva sull'essere le strutture madri naturali (come poi sarebbe stato accertato) ovvero artificiali (cioè « il semplice risultato della teorizzazione e della assiomatizzazione » [124]). Ma nel secondo caso che tipo di sanzioni l'epistemologia genetica avrebbe potuto infliggere?

Lo possiamo desumere per via indiretta dall'esame del procedimento refutativo a cui vengono sottoposte le tesi di Russell: trasferita su scala infantile, la riducibilità dei numeri naturali ad operazioni logiche è invalidata dal fatto che le applicazioni biunivoche anteriori all'acquisizione di nozioni numeriche (ossia appartenenti allo stadio preoperatorio) risultano ' qualificate ', nel senso che solo le qualità degli oggetti consentono (fin qui) di riunirli in aggregati. Sennonché quelle di cui Russell avrebbe bisogno sono corrispondenze arbitrarie in cui si fa astrazione

[123] Piaget, *L'epistemologia genetica*, cit., p. 6.

[124] Piaget, *Conferenze sull'epistemologia genetica*, Roma, Armando, 1972, pp. 36-37 (ediz. orig.: *Genetic Epistemology*, New York - Londra, Columbia University Press, 1970).

proprio dalle qualità dei termini in gioco: ma ciò significa mutarli in unità indiscernibili ed almeno una nozione numerica sarebbe in tal modo presupposta nella struttura delle classi per venirne in seguito estratta a livello definitorio. Piaget riesuma dunque le classiche obiezioni poincareiane, collocandole tuttavia nello sviluppo mentale del bambino: facendo di questo la manifestazione esclusiva della realtà, ha poi buon gioco nel contestare su un altro punto la dottrina di Russell, giacché — come sappiamo — nella genesi ' concreta ' del concetto di numero naturale, oltre all'equivalenza tra classi, è implicata un'altra operazione (seriazione o ordinamento)[125].

Il riduzionismo logicista risulta pertanto doppiamente infondato, ben inteso d a l p u n t o d i v i s t a d e l l a p s i c o l o g i a. Eppure, per quanto ne sappiamo, Russell non pretese mai che i *Principia* ricalcassero i processi mentali che conducono all'apprensione vernacola del numero. Per il logicista, che ritiene di aver a fare con verità atemporali, la soluzione del problema dipende infatti da un responso teorico e non già dal grado di verosimiglianza psicologica che essa presenta. L'impressione è, insomma, che l'epistemologia genetica possa esercitare con diritto la propria autorità soltanto in presenza di dottrine scientifiche su cui gravino presupposti gnoseologici tali da giustificarne l'esistenza (delle quali l'intuizionismo è forse l'unico esemplare).

Tornando all'opera di Bourbaki, è allora evidente che essa non verrebbe minimamente compromessa nel caso in cui le strutture madri costituissero il risultato di « un'elaborazione teorica recente »[126], priva di contropartita psicologica: se cosí fosse, si sarebbe infatti stabilito semplicemente che la fondazione teorica in questione ed i fondamenti psicologici della matematica non procedono parallelamente (il che, detto per inciso, è quanto i membri del gruppo avevano pubblicamente sempre sostenuto). Ben piú preoccupanti, viceversa, sarebbero le conseguenze per l'epistemologia genetica: in effetti, in mancanza d'un addentellato di questa sorta, verrebbe meno anche la sua ragione d'esistenza, dal momento che ben difficilmente si potrebbe ancora affermare che il pensiero astratto si innesti su quello naturale e ne venga in qualche modo condizionato. Constatando cosí l'irrimediabile distanza tra i due ordini di realtà, la psicologia genetica vedrebbe frustrate le proprie aspirazioni

[125] Sul caso Russell cfr. per esempio J. Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique: 1) la pensée mathématique*, Parigi, P. U. F., 1973², pp. 88-94.

[126] Piaget, *Épistémologie mathématique et psychologie*, cit., p. 176.

gnoseologiche, tornando ad essere una dimessa « raccolta di storie di neonati »[127].

Se le cose stanno altrimenti, resta pur vero che, mentre la classificazione bourbakista è relativa ad un determinato momento storico (ossia contingente), tale non può evidentemente essere il suo corrispettivo naturale. Allora è lecito domandarsi se e come un mutamento del quadro concettuale si ripercuoterebbe verso il basso. Supponiamo infatti che l'evoluzione della scienza faccia emergere una nuova struttura irriducibile a quelle sinora catalogate (per esempio quella di automa elementare) e che la sua fortuna sia tale da guadagnarsi l'interessamento dell'epistemologia genetica: dove questa potrebbe situarla nell'ambito dell'intelligenza infantile? A meno di non adombrare repentine mutazioni della specie, certo non tra i simulacri delle strutture madri (giacché è stato assodato che essi coprono le competenze operatorie di un determinato livello). Si dovrà dunque dichiararla innaturale, oppure dislocarla in altri stadi dello sviluppo mentale; in ambedue i casi, tuttavia, il parallelismo precedentemente stabilito tra naturale e teorico verrebbe infirmato, salvo non riconoscere che sono i dati psicogenetici ad esser condizionati dalle conoscenze scientifiche e non il contrario.

Del resto è ozioso ragionare su congetture, perché un'evenienza di questo genere si è di fatto verificata: con il prestigio che la teoria delle categorie venne acquisendo a metà degli anni Sessanta, era inevitabile che l'epistemologia genetica finisse con l'occuparsene[128]. Ma se già questa circostanza non può non renderne sospetta la ricezione psicologica, abbiamo anche la fortuna di disporre della documentazione relativa al suo allestimento.

Non possono infatti venir considerate altrimenti le speculazioni di ordine generale che Grize dedica all'argomento[129]: costui prende spunto dallo statuto epistemologico della nozione di funzione, chiedendosi se l'interpretazione insiemistica che la riduce ad essere un caso speciale del-

[127] Piaget, *Psicologia ed epistemologia*, Torino, Loescher, 1974, p. 31 (ediz. orig.: Parigi, Gonthier, 1970).

[128] Non abbiamo di meglio che citare quanto Piaget asserisce candidamente in proposito: « Dal momento che i morfismi e le categorie sono divenuti l'interesse preminente d'un gran numero di matematici contemporanei, mi sono domandato se non se ne fosse potuto trovare qualcosa nello sviluppo del bambino » (J. C. Bringuer, *Conversations libres avec Jean Piaget*, Parigi, Laffont, 1977, p. 147).

[129] J. B. Grize, *Analyses pour servir à l'étude épistémologique de la notion de fonction*, in J. Piaget e altri, *Épistémologie et psychologie de la fonction*, Parigi, P. U. F., 1968.

le relazioni abbia un qualche fondamento psicologico. Tutto sta, evidentemente, nel verificare se l'anteriorità di principio che viene accordata alle classi abbia un riscontro nello sviluppo dell'intelligenza infantile o se, viceversa, la genesi della nozione di funzione si configuri autonomamente. Ora il fanciullo, nella sua attività classificatoria, prima che con aggregati ha che fare con collezioni, le quali si distinguono dai primi in quanto non esiste motivazione perché un oggetto ne sia incluso o escluso, giacché esse non costituiscono ancora totalità chiuse in se stesse, ma procedono costruttivamente passo dopo passo. La teoria delle categorie e, piú in generale, gli studi matematici sui morfismi forniscono allora gli strumenti adeguati alla descrizione di questa fase transitoria che condurrà alla formazione degli insiemi: in essa la subordinazione delle funzioni alle classi non è presupposta, mentre sono gli oggetti posti in corrispondenza (nella loro struttura elementare, quella di coppia ordinata) a costituirne le componenti primitive [130]. Resta dunque da chiarire questa forma di strutturazione: anziché ricorrere alle definizioni insiemistiche della coppia (che solleverebbero il problema dell'introduzione dell'ordine in una classe di due elementi), Grize propone di approntarne un'analisi ' diretta ', sulla base della costituzione di un dominio e di un codominio passibile di interpretazione categoriale [131]. La coppia costituisce cosí il modello piú elementare di categoria: esso, per quanto banale possa apparire, farebbe già presagire (stando a Piaget) « la generalità di questa struttura fondamentale » [132].

Sennonché l'interpretazione di Grize non si fonda sulla commistione tra teorico e fattuale cui Piaget ci aveva assuefatti, bensí su quella tra teorico e virtuale. Essa, infatti, non è estorta da dati empirici, ma (in-

130 Il formalismo categoriale permette allora di chiarire i rapporti tra estensione e intensione: se le frecce rispondono ad attività qualsiansi mediante le quali il bambino coordina gli oggetti, dominio e condominio verranno a formarsi di conseguenza. Le frecce-unità possono quindi venir interpretate come comprensione dei due insiemi (per esempio fornendo la ragione per cui determinati elementi entrano a far parte dell'uno o dell'altro) mentre agli ' oggetti ' corrisponderà la loro estensione. Cfr. Grize, *op. cit.*, pp. 192-193.

131 La coppia (a, b), ordinata nel senso dell'applicazione $a \to b$, rimanda infatti alla sua inversa, in quanto esse costituiscono aspetti distinti d'una medesima realtà. Tali ' aspetti ' poi si moltiplicano, in quanto $(a, a) = \{a, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$, il che significa che « (a, a) non rinvia ad altro che ad a » e si è pertanto « naturalmente condotti a considerare l'insieme » $\mathcal{C} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$, che costituisce appunto una categoria (in cui la composizione delle coppie assume significato ovvio o, per dirla con Grize, « affatto naturale »). Cfr. *op. cit.*, p. 195.

132 Piaget, *L'epistemologia genetica*, cit., p. 84.

vocando questa o quella esperienza immaginaria e *ad hoc*) è il frutto di semplici supposizioni: si tratta, insomma, di ' estrapolazioni ' psicogenetiche che suggeriscono alla realtà come comportarsi. Il condizionale è dunque d'obbligo: « se la sperimentazione psicologica giungesse a mettere in evidenza [la nozione di categoria] nel fanciullo, avremmo fatto un passo in avanti nella stessa direzione » che i matematici attualmente perseguono esplorando le fondamenta dell'edificio scientifico piú in profondità di quanto la ricognizione bourbakista non avesse fatto [133].

Nulla ci vieta a questo punto di considerare quelle esperienze ipotetiche come progettazione di un protocollo sperimentale congegnato espressamente in vista delle inferenze epistemologiche che se ne vogliono trarre: con ciò Grize avrebbe posto (qui, in realtà, il condizionale è superfluo) l'intero apparato retorico-sperimentale dell'epistemologia genetica al servizio d'una determinata dottrina matematica e delle sue ambizioni fondatrici allo scopo di fornir loro una legittimazione naturalistica, sotto l'unica riserva della veridicità delle sue predizioni psicogenetiche. Allora riesce facile a Piaget ed al suo gruppo d'esperti di *bricolage* darne conferma empirica [134], ed anche questa operazione apologetica è condotta in porto.

Quanto alla sua compatibilità con l'incensamento bourbakista di solo qualche anno addietro, il problema è scansato — come ci si poteva attendere *a priori* — retrodatando le categorie (o meglio il loro succedaneo psicologico) nella cronistoria delle acquisizioni infantili: l'emergere delle funzioni precede infatti quello delle strutture operatorie ed i tentennamenti che si riscontrano nella formazione delle prime vengono interpretati in termini categoriali sotto forma di componibilità parzialmente definita tra frecce. L'intera vicenda è poi ricondotta da Piaget allo schema dell'astrazione riflettente: in conformità ad esso, infatti, le categorie risultano anteriori rispetto alle strutture nel campo dell'intelligenza infantile, mentre in quello delle elaborazioni scientifiche esse appaiono piú tardivamente. Dovendo scaturire da quelle per astrazione, non sarebbe potuto accadere altrimenti: « dopo aver portato

[133] Cfr. Grize, *op. cit.*, pp. 195-196.

[134] In realtà la serie di esperimenti riportati nel volume può solo parzialmente venir considerata una verifica delle ' induzioni ' di Grize; d'altra parte una volta stabilito che le ' funzioni costituenti ' (ossia le coppie) precedono le classi, ogni falsificazione appare impossibile se si tien conto del modo in cui la nozione di categoria è stata fatta scaturire da quelle (cfr. la precedente nota 131). Come modello descrittivo essa potrà infatti soltanto (pre)orientare indagini ulteriori.

alla luce le grandi strutture (...) i matematici sono andati alla ricerca di sistemi piú elementari ed ancor piú generali »[135], qual è appunto la nozione di categoria secondo l'interpretazione *standard*. Che quest'astrazione sia poi riflettente, è provato dal fatto che la stessa analisi ' quasi induttiva ' (come la chiama Piaget) attraverso cui i bourbakisti censirono le strutture madri costituí un'operazione euristica che — a suo modo di vedere — utilizzava, senza tuttavia tematizzarli, dei procedimenti ' funtoriali ' di cui la teoria delle categorie avrebbe fatto in seguito l'argomento di un'indagine esplicita[136].

Che cosa tutto ciò significhi sul piano epistemologico, è ancora Grize a suggerircelo: « non è escluso che la classe non sia la realtà psicologica ultima, piú di quanto la teoria degli insiemi non sia l'ultima parola sui fondamenti della matematica »[137].

135 Piaget, *La coordination des couples*, in *Épistémologie et psychologie de la fonction*, cit., p. 17.

136 Cfr. *Conversations libres avec Jean Piaget*, cit., p. 146.

137 Grize, *op. cit.*, p. 196.

Capitolo Quarto

LE STRUTTURE DAL PUNTO DI VISTA CATEGORIALE

« Not Substance, but invariant Form is the carrier of the relevant mathematical information »

Francis William Lawvere, *An elementary theory of the category of sets*

1. - La carriera di un paradigma.

Sin dalle sue prime apparizioni, la teoria delle categorie sembra aver coltivato ambizioni ' unificatrici '. Nello scritto a cui si è soliti far risalire il suo esordio ufficiale, gli autori Eilenberg e Mac Lane affermano che la teoria (fornendo strumenti « applicabili ad ogni branca della matematica astratta » e capaci di stabilire raffronti e rivelare affinità tra situazioni relative a dominî distinti) s'inserisce « nella tendenza volta alla trattazione uniforme di discipline matematiche differenti » [1]. Se in tal modo essa ha o vuol darsi una collocazione epistemologica ben determinata, ciò non avviene senza far rilevare quello che è il suo motivo di originalità: la necessità di contemplare, nella definizione di una classe di strutture, la famiglia dei loro morfismi, conducendo cosí alla considerazione di categorie in luogo di strutture irrelate. A conforto di questa necessità la teoria è in grado di esibire la ' formalizzazione ' del concetto intuitivo di isomorfismo naturale, da cui trae la motivazione originaria e ricava (sino a questo momento) anche il nome.

Fenomeni di ' naturalità ' s'incontrano frequentemente in mate-

[1] S. Eilenberg e S. Mac Lane, *General theory of natural equivalences*, « Transactions of the American Mathematical Society », LVIII (1945), p. 236.

matica e senza difficoltà si riconoscono come tali. L'isomorfismo naturale che lo scritto reca ad esempio è quello sussistente tra gli spazi vettoriali di dimensione finita e i rispettivi ' doppi duali '. Se **V** è un tale spazio, l'insieme $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ delle trasformazioni lineari $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ costituisce a sua volta [2] uno spazio vettoriale $D(\mathbf{V})$, detto *duale* di **V**. Avendo $D(\mathbf{V})$ la stessa dimensione di **V**, i due spazi risultano isomorfi. Reiterando la medesima costruzione, si ottiene lo spazio $D(D(\mathbf{V})) = D^2(\mathbf{V})$, costituito dalle trasformazioni lineari $\omega_{\underline{x}} : D(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $\omega_{\underline{x}}(f) = f(\underline{x})$, dove $\underline{x} \in V$, $f \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$.

Come è verificabile in maniera diretta, sussiste un isomorfismo anche tra lo spazio di partenza ed il duale del suo duale, o ' doppio duale '. Sennonché tale isomorfismo presenta caratteristiche differenti rispetto al precedente: infatti, mentre il doppio duale s'identifica immediatamente con lo spazio considerato, nel caso del duale ' semplice ' ciò non avviene se non per interposizione di una base dello spazio determinata esplicitamente.

La necessità di questo ricorso esprime, in certo senso, il grado di contingenza dell'isomorfismo in questione: dal momento che alla scelta di una base diversa corrisponde un diverso isomorfismo, non c'è ragione di attribuire ad uno di essi in particolare una condizione privilegiata. Viceversa, l'isomorfismo che lega lo spazio al suo doppio duale è formulabile in un unico modo per tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita, ed è precisamente questa circostanza a far sí che l'isomorfismo sia riconosciuto come naturale diversamente dal precedente.

Si tratta allora di dare contenuto matematico a questa differenza, estrapolando dalla situazione rinvenuta ' empiricamente ' uno schema generale capace di fornirne un'interpretazione teorica.

Se la caratteristica rilevante dell'isomorfismo naturale è che esso è dato simultaneamente per ogni spazio, per ottenerne la traduzione astratta (ovverosia una condizione di verificabilità), l'intera specie dovrà esser coinvolta nella sua definizione, assumendo — con la totalità delle strutture — anche le loro molteplici possibilità di confronto, i morfismi. Quest'implicazione appare giustificata se si considera che i morfismi esprimono le connessioni interne alla specie (essendo per definizione corrispondenze che la preservano) e, in quanto tali, possono misurare l'invarianza del costrutto in esame rispetto a quella. Occorrerà quindi rap-

[2] Rispetto alla somma di funzioni e al loro prodotto per uno scalare.

portare l'intreccio di queste connessioni al livello dei doppi duali, cioè assegnare per ogni applicazione lineare tra spazi $\lambda : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ un'applicazione lineare tra i relativi doppi duali $D^2(\lambda) : D^2(\mathbf{V}) \to D^2(\mathbf{W})$ [3].

La naturalità dell'isomorfismo si riscontra allora facendone variare ' in parallelo ' gli argomenti lungo applicazioni lineari tra i membri delle due classi di strutture. Formalmente essa è espressa dalla richiesta di commutatività del seguente diagramma (in cui $\nu_{\mathbf{V}}$ e $\nu_{\mathbf{W}}$ rappresentano gli isomorfismi naturali relativi agli spazi $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\nu_{\mathbf{V}}"] \arrow[d, "\lambda"'] & D^2(\mathbf{V}) \arrow[d, "D^2(\lambda)"] \\ \mathbf{W} \arrow[r, "\nu_{\mathbf{W}}"] & D^2(\mathbf{W}) \end{tikzcd}$$

ossia dalla richiesta di identità delle due funzioni composte $\nu_{\mathbf{V}} \cdot D^2(\lambda)$ e $\lambda \cdot \nu_{\mathbf{W}}$ [4] per ogni coppia di spazi vettoriali e ogni applicazione lineare tra loro definita.

L'obiettivo di dare un senso rigoroso all'identificabilità ' naturale ' tra strutture è in tal modo conseguito. Non si potrà tuttavia parlare di soluzione del problema, come se questa fosse predeterminata e semplicemente latente; si potrà piuttosto valutare l'adeguatezza della risposta teorica, commisurandola innanzitutto ai casi particolari già noti [5].

Nello scarto tra dato intuitivo e spiegazione formale risiede il momento stipulativo della formalizzazione del fenomeno, e la situazione

[3] Tale applicazione fa corrispondere all'elemento ω_x di $D^2(\mathbf{V})$ l'elemento $\omega_y = \omega_{\lambda(x)}$ di $D^2(\mathbf{W})$ che ad una trasformazione lineare $t : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ associa il valore $t(y)$.

[4] Adottiamo la scrittura moltiplicativa $f \cdot g$ per esprimere la composizione $\xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g}$. Tale notazione (risalente a Dedekind) ci sembra infatti piú congeniale allo spirito categoriale di quanto non lo sia l'opposta (adottata per altro dallo stesso Mac Lane), che ricalca la scrittura funzionale $f(g(x))$. Non seguiamo tuttavia Lawwere quando antepone l'argomento alla funzione, scrivendo $x f g$ in luogo di $f(g(x))$; quando intervengono gli argomenti preferiamo infatti adottare l'abituale scrittura con le parentesi. In conclusione, le due notazioni $f \cdot g$ e $g(f(x))$ esprimono per noi lo stesso ordine di composizione.

[5] In tal modo l'isomorfismo sussistente tra uno spazio vettoriale e il suo duale, giudicato ' innaturale ' dal punto di vista intuitivo, seguita a rimanere tale anche rispetto alla definizione formale.

rappresentata dal diagramma sopra riportato, considerata sufficiente a renderne conto, preannuncia quello che sarà l'andamento caratteristico della teoria delle categorie: esplorare e sfruttare le capacità espressive del confronto tra funzioni composte.

La tematizzazione degli isomorfismi naturali dischiude cosí un orizzonte teorico piú ampio, che eccede la prospettiva insiemistica strutturale classica. Difficilmente, tuttavia, potremmo riconoscere nella configurazione categoriale l'assetto che quello deve necessariamente assumere. Alle nozioni chiave della teoria (trasformazione naturale, funtore, categoria) si perviene infatti mediante ulteriori stipulazioni che non sembrano né migliorare il livello di comprensione del fenomeno, né essere richiesti a titolo di assunzioni implicite. È in tal modo che l'applicazione lineare generica $\lambda : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ del diagramma viene interpretata come valore di un opportuno funtore (il funtore ' identico ' che lascia inalterati i suoi argomenti), in modo da far diventare l'isomorfismo naturale una equivalenza (naturale) tra funtori, la quale non rappresenta per parte sua che un caso particolare di trasformazione naturale. L'adozione del termine ' funtore ' è d'altra parte abusiva finché non venga esplicitata la natura degli enti su cui è chiamato ad agire, ossia le categorie (in effetti non s'è trattato fin qui che di mere corrispondenze che associano strutture a strutture, morfismi a morfismi).

Riconoscendo allora alle classi che ne fungono da dominio e da codominio una struttura algebrica, relativa alla composizione dei morfismi, si giunge alla definizione di categoria; i funtori divengono le corrispondenze che preservano tale struttura.

Press'a poco in questi termini viene prospettata la ' genealogia ' del nuovo vocabolario teorico: districando, in presenza di ogni nozione introdotta, gli elementi soggiacenti al suo funzionamento. Lo scenario categoriale scaturirebbe dunque come esplicitazione di esigenze interne della teoria, per quanto essa esorbiti, nel suo assetto conclusivo, dalle necessità contingenti al problema esaminato inizialmente.

Tale scelta espositiva, svolgendo mansioni prevalentemente didascaliche, potrebbe apparire irrilevante dal punto di vista matematico. Nondimeno essa esercita un peso considerevole riguardo al tema di cui ci stiamo occupando, ovverosia l'insorgenza del paradigma categoriale. Infatti, seppure in questo luogo se ne trovino solo frammenti, non si può fare a meno di notare che essi trascurano quella che parrebbe costituire la prerogativa della teoria (descrivere i meccanismi che governano la comunicazione *inter species*), per attribuire invece rilevanza alle sue facoltà esplicative *infra speciem*: va intesa in tal senso la dichiarazione secondo cui l'argomento di una determinata teoria (di struttura) consiste nello studio delle costruzioni funtoriali effettuabili al suo interno [6]. Inoltre, l'ordine d'introduzione delle nozioni, ciascuna richiesta come sostegno dello stadio superiore, stabilisce di fatto una scala di priorità che relega le categorie ad assicurare ai funtori semplicemente un dominio e un codominio.

Esse sembrano cosí sprovviste di una realtà che le contraddistingua in quanto oggetti, circostanza a cui non è indifferente la mancanza di una loro collocazione insiemistica ben definita. In effetti, categorie come quella di tutti gli insiemi implicano il riferimento a classi proprie; l'adozione del sistema di Gödel-Bernays non sembra però del tutto soddisfacente ad Eilenberg e Mac Lane se essi si affrettano ad abbozzare soluzioni alternative che, tuttavia, presentano l'inconveniente di assegnare una molteplicità di categorie in corrispondenza d'una singola specie di strutture (avremmo in tal caso piú categorie degli insiemi, piú categorie dei gruppi, e cosí via).

Se lo scritto si limita ad esaminare le possibilità d'interpretare le costruzioni categoriali in seno a differenti fondazioni insiemistiche, difficoltà piú impegnative non tarderanno ad emergere. In un articolo del 1959 [7] Mac Lane individua alcune costruzioni insiemistiche in cui l'algebra omologica s'imbatte nel corso di alcune indagini che sembrano coinvolgere totalità illegittime. La via d'uscita proposta da Mac Lane consiste nel limitarne l'osservazione su scala locale mediante la restrizione ad opportune sottocategorie ' piccole ', in cui si può sempre immergere un numero finito di oggetti della categoria considerata inizialmente. Una condizione di ' adeguatezza ' che Mac Lane formula in proposito garantisce inoltre l'effettuabilità all'interno di tali sottocategorie delle operazioni a cui la teoria è interessata, in modo da ottenere risultati indistinguibili da quelli che la categoria ambiente procurerebbe.

Per quanto ingegnoso, questo metodo non risolve che una parte degli intralci rilevati. Esso rimane inoltre circoscritto alle esigenze dell'algebra omologica: è in rapporto ad esse, infatti, che le sottocategorie risultano ' adeguate ', ma un contesto teorico differente richiederebbe

[6] Cfr. Eilenberg e Mac Lane, *op. cit.*, p. 237.

[7] S. Mac Lane, *Locally small categories and the foundations of set theory* (in *Infinitistic Methods, Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959*, Oxford, Pergamon Press, 1961).

una definizione d'adeguatezza *ad hoc*, che — incaricata di stabilire quali siano le costruzioni fondamentali della disciplina in questione — introdurrebbe inevitabilmente un elemento di contingenza, relativo al suo stadio d'elaborazione sino a quel determinato momento [8].

Mac Lane tornerà a piú riprese sui rapporti tra categorie ed insiemi, abbandonando tuttavia il tipo di soluzione qui delineato. Nei successivi interventi si registrerà anzi un significativo mutamento prospettico, conseguente ad una diversa consapevolezza sul ruolo e le possibilità della teoria delle categorie, per cui non la si riterrà piú tenuta a piegarsi alle esigenze della fondazione insiemistica. Dalla circostanza che le differenti formulazioni di quest'ultima si rivelino inadeguate a ricevere tutte le costruzioni categoriali non si ricercheranno piú espedienti che le legittimino alla luce di un particolare sistema disponibile, ma si ricaverà ormai la necessità di escogitarne nuovi, meglio rispondenti ai fabbisogni della teoria.

Lasciando da parte assunzioni controverse come la categoria di tutte le categorie, il problema di fondo è quello di trattare con categorie di dimensione differente. Adottando il sistema di Gödel-Bernays la distinzione tra classe e insieme si riflette in quella tra categorie grandi e piccole (misurate dalle rispettive famiglie dei morfismi); al suo interno risulta possibile concepire la categoria di tutti gli insiemi, quella di tutte le categorie piccole e le categorie dei funtori definiti tra due categorie date, purché il dominio sia costituito da una categoria piccola. Una soluzione alternativa, prospettata da Grothendieck, prevede l'assunzione di universi, ovverosia di modelli del sistema di Zermelo-Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma che afferma che ogni insieme è membro di un universo [9]. Questa impostazione permette di considerare la categoria di tutti i gruppi, di tutti gli insiemi o di tutte le categorie in seno ad un universo determinato e di formare senza restrizione le categorie di funtori mediante il passaggio ad universi piú vasti. La difficoltà che s'incontra in questo frangente è quella di stabilire confronti tra categorie definite entro universi differenti.

A questo proposito Mac Lane ha proposto [10] di riferirsi ad un unico

[8] Sull'argomento si veda G. Lolli, *Categorie, universi e principi di riflessione*, Torino, Boringhieri, 1977.

[9] Gli universi possono essere definiti altrimenti, caratterizzandoli attraverso possibilità operatorie. Cfr. Lolli, *op. cit.*

[10] S. Mac Lane, *One universe as a foundation for category theory* (in *Reports of the Midwest Category Seminar, III*, Springer Lecture Notes 106, 1969).

universo, interpolando il sistema di Zermelo-Fraenkel con l'assioma che ne postula l'esistenza. ' Insieme ' significherebbe allora insieme arbitrario, ' insieme piccolo ' un insieme che sia membro dell'universo. Nelle intenzioni di Mac Lane gli insiemi piccoli costituirebbero il supporto degli ordinari oggetti matematici, gli altri servirebbero invece a descrivere le diverse categorie definibili a partire da quelli. Risulta allora possibile costruire la categoria degli insiemi piccoli, il cui insieme degli oggetti è costituito dall'universo in questione. Restano tuttavia escluse la categoria di tutti gli insiemi indistintamente, al pari di quella di tutte le categorie (grandi e piccole).

La necessità di considerare categorie di diversa grandezza suggerisce un'altra soluzione: quella di riferirle a modelli variabili della teoria degli insiemi. Ciò convenuto, per far fronte alle esigenze categoriali risultano sufficienti assunzioni insiemistiche piú deboli di quelle espresse dal sistema di Zermelo-Fraenkel. Mac Lane ha esaminato una teoria di questa sorta (che contempla semplicemente insiemi ed elementi, ma non insiemi di insiemi), formulandone il sistema d'assiomi in un articolo del 1969 [11].

Altri autori hanno prospettato differenti soluzioni del problema [12].

Quale che sia la portata da attribuire a questo genere d'indagini, sicuramente non vi rintracceremmo ciò di cui siamo in cerca, vale a dire il delinearsi del paradigma categoriale. Esse, in effetti, non fanno che rapportare la teoria delle categorie all'apparato preesistente, rivelandone le difficoltà d'ambientazione: si tratta pertanto solo di autenticare le possibilità di un discorso, le cui ragioni dimorano evidentemente altrove. L'evolversi delle ambizioni epistemologiche della teoria si è intrecciato — è vero — con preoccupazioni fondazionali relative alla postulazione di grandi totalità, ma le ricerche in questa direzione (per quanto senza dubbio necessarie), rappresentano il lato meramente giustificativo della vicenda, e dunque sicuramente il meno interessante. Tanto piú che la posizione che ci pare al riguardo la piú avanzata, è proprio quella che sembra aver destato la minore attenzione.

[11] S. Mac Lane, *Foundations for categories and sets* (in *Category Theory, homology theory and their applications, II*, Springer Lecture Notes 92, 1969).

[12] Si vedano per esempio J. Sonner, *On the formal definition of categories*, « Mathematische Zeitschrift », LXXX (1962); S. Feferman, *Set theoretical foundations for category theory* (in *Category theory, homology theory and their applications*, cit.).

In un articolo del 1971 [13] Mac Lane osserva che, a fronte dei numerosi risultati significativi sulle categorie, non esiste alcun contesto fondazionale in cui sia possibile interpretarli contemporaneamente. Le singole fondazioni rappresentano piuttosto differenti stati d'osservazione tra cui vige una sorta di complementarità: adottandone uno in particolare alcune costruzioni impegnative vengono legittimate, ma altre restano precluse. Da questa constatazione Mac Lane ricava conseguenze radicali: o ci si ingegna a mettere a punto un nuovo sistema fondativo che soddisfi tutte le esigenze della teoria (e, nell'eventualità, revochi agli insiemi la posizione di privilegio che è loro comunemente accordata), oppure si lascia cadere la pretesa di disporre di una fondazione unica ed onnicomprensiva, ricorrendo in sua vece all'impiego simultaneo di piú sistemi formali. Questa fondazione ' pluralistica ' li assumerebbe alla stregua di sistemi di riferimento, in modo che gli oggetti dell'indagine categoriale possano ricevere un'interpretazione nell'uno o nell'altro.

Senza dubbio, agli occhi dell'epistemologia dominante, una soluzione di questo tipo apparirebbe irreparabilmente precaria, ammissibile soltanto in vista di determinati obiettivi pratici. In effetti, quella che Mac Lane ha compiuto non è altro che la codificazione di una prassi; ma è proprio prospettandola come un'opzione teoretica che egli ci porta ad interrogarci sulle ragioni di fondo di quell'insoddisfazione. Se venisse presa sul serio, la soluzione proposta finirebbe infatti col porre in discussione la stessa problematica dei fondamenti, vanificando l'ideologia ingenua che l'ha fin qui sorretta.

Che cosa, si chiede Mac Lane, fa sí che il sapere matematico debba essere omologato in un unico sistema formale? La candidatura della teoria degli insiemi a fondamento della matematica traeva la sua autorevolezza dalla circostanza che ogni oggetto che s'incontrava nella pratica era definibile al suo interno, ogni operazione effettuabile, ogni asserzione riconducibile; soprattutto, si ragionava a livello intuitivo nei termini della teoria. Ebbene, la prospettiva della ' grande fondazione insiemistica ' esprime ormai una veduta unilaterale e coercitiva (o ' monolitica ', come la definisce Mac Lane) [14]: dal momento che la varietà degli oggetti ri-

[13] S. Mac Lane, *Categorical algebra and set-theoretic foundations* (in *Axiomatic Set Theory, Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics*, vol. XIII (1), New York, American Mathematical Society, 1971).

[14] Cfr. S. Mac Lane, *Mathematical Models: a Sketch for the Philosophy of Mathematics*, American Mathematical Monthly, 1981 (in particolare § 5).

chiesti dalle ricerche categoriali non riesce ad essere ospitata in nessun sistema formale sin qui conosciuto, essa appare piú un'istanza ideologica che un'aspirazione epistemologica. La situazione felice in cui pratica matematica e fondamenti coincidevano appartiene dunque ad un'epoca ormai conclusa: « quel paradiso è irrimediabilmente perduto » [15].

Resterebbe, inesplorato, l'altro corno dell'alternativa: sistemi di fondazione che ricusino gli insiemi in quanto nozione primitiva. Mac Lane osserva al riguardo che non è neppure inevitabile eleggere l' e l e m e n t a r e (in senso lato) come principio esplicativo e che, anzi, ricorrendo a nozioni piú articolate di quella d'insieme, il discorso « aderirebbe meglio ai fatti » [16]. Se in tal modo sembra lasciar trapelare l'ipotesi di una fondazione non riduzionistica aperta a possibilità diverse, il prioritario termine di confronto che gli si presenta sono i lavori che, in fatto di fondamenti, i categoristi s'incaricarono di gestire in proprio nel corso del decennio precedente.

Ma che cosa chiedere, *a priori*, a una fondazione che voglia configurarsi in termini ' puramente categoriali '? Ovvero, che cosa si deve intendere con questa espressione? Sin dalla fine degli anni Quaranta era noto che alcune costruzioni insiemistiche si lasciano esprimere attraverso diagrammi commutativi, senza che il comportamento ' puntuale ' delle funzioni coinvolte debba venir considerato. L'esempio capostipite è indubbiamente quello dei prodotti cartesiani [17].

Associate ordinariamente al prodotto cartesiano di due insiemi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (definito come l'insieme delle coppie ordinate dei loro elementi) sono le proiezioni canoniche $\pi_1 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$, $\pi_2 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, definite rispettivamente dalle relazioni $\pi_1(<a,b>) = a$, $\pi_2(<a,b>) = b$.

Dal fatto che queste funzioni sono, appunto, canoniche, l'analisi categoriale rileva una proprietà che le contraddistingue rispetto alle altre. In effetti, assegnare un'arbitraria applicazione a valori nel prodotto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ significa esplicitarne le componenti, ovverosia considerare le due applicazioni ottenute ' prolungando ' quella data lungo le proiezioni. Ciò equivale anche a richiedere che, in presenza di due applicazioni qualsiasi α e β definite su uno stesso insieme, esista esattamente una funzione γ

[15] S. Mac Lane, *Possible Programs for categorists* (in *Category Theory, homology theory and their applications, I*, Springer Lecture Notes 86, 1969, p. 131).

[16] S. Mac Lane, *Categorical algebra and set-theoretic foundations*, cit., p. 235.

[17] Cfr. S. Mac Lane, *Duality for groups*, « Bulletin of the American Mathematical Society », vol. XVI (1950), pp. 489-491.

a valori nel prodotto dei rispettivi codominî che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& C \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

(ossia tale che $\gamma \cdot \pi_1 = \alpha$ e $\gamma \cdot \pi_2 = \beta$).

D'altra parte questa proprietà caratterizza [18] l'oggetto 'prodotto cartesiano' a meno di una biezione (cioè d'un isomorfismo per la specie di struttura considerata), sicché potrebbe venire assunta in qualità di sua definizione. Come tale, essa si situa ad un differente livello di generalità, poiché riferendola a categorie distinte da quella degli insiemi (come la categoria dei gruppi o degli spazi topologici) vi individua — quand'esse li ammettano — i prodotti relativi alla specie di struttura in questione. L'algebra dei morfismi consente cosí di descrivere intrinsecamente determinate situazioni matematiche: la versione categoriale del prodotto assomiglia alla condizione di risolubilità di un sistema di equazioni, in cui le proiezioni fungono da parametri e le applicazioni poste a confronto da variabili.

Emerge nel contempo la condizione che le strutture vengono ad assumere in quanto oggetti di una categoria: esse non vengono individuate da proprietà concernenti il loro assetto interno, ma dalla molteplicità delle relazioni che intrattengono con l'ambiente circostante, vale a dire dalla ramificazione dei morfismi che vi giungono o ne partono [19]. D'altro canto, questa rete d'interconnessioni non rivela una trama indifferenziata, ma determinati oggetti vi risaltano per il modo in cui si rap-

[18] Tra tutti gli insiemi che fungono da dominio per una coppia d'applicazioni a valori in **A** e **B** rispettivamente.

[19] Jurij Manin ha riconosciuto in questo motivo il carattere distintivo dell'approccio categoriale nei confronti dell'orientamento strutturalista, rispetto a cui risulterebbe 'duale', approntando una descrizione relazionale (o 'sociologica') dell'oggetto matematico in cui esso non è piú concepito come entità individuale, ma come « membro di una comunità di suoi simili ». Si vedano al riguardo i suoi interventi *Applicazioni*, *Dualità*, *Strutture matematiche* nei volumi I, V, XII della *Enciclopedia*, Torino, Einaudi, 1977-1984. Cfr. anche la voce *Uno/molti* di J. Petitot (vol. XIV).

portano[20] agli altri (in gergo categoriale simili costruzioni vengono denominate ' universali '). Cosí, dati due insiemi arbitrari, in seno alla famiglia delle coppie d'applicazioni di egual dominio cui essi forniscono gli insiemi dei rispettivi valori, le proiezioni si distingono per il fatto che le altre vi si decompongono univocamente: con ciò anche il prodotto (in quanto loro dominio di definizione) resta automaticamente determinato.

Questo risultato è un concreto esempio che suggerisce la pista da battere per potersi affrancare dalla soggezione insiemistica. L'ipotesi di una fondazione categoriale diviene cosí accessibile e, quando attorno alla metà degli anni Sessanta Lawvere intraprende l'impresa[21], non deve forzare a scopo epistemologico di dettato della teoria, ma solo metterne alla prova le capacità espressive. Capovolgendo quelli che sino ad allora erano ritenuti i termini del problema, Lawvere formula un sistema d'assiomi del primo ordine per descrivere la categoria degli insiemi. Gli oggetti privilegiati della teoria degli insiemi sono definiti tramite proprietà universali; cosí l'oggetto $\mathbf{0}$ (di cui un assioma postula l'esistenza) è contraddistinto dalla proprietà di essere un oggetto ' iniziale ', tale cioè che per ogni altro oggetto $\mathbf{X}$ della categoria esista esattamente un morfismo $f : \mathbf{0} \to \mathbf{X}$; $\mathbf{0}$ recita dunque la parte dell'insieme vuoto. La proprietà ' duale ' (l'esistenza, per ogni oggetto $\mathbf{X}$, di esattamente un morfismo $f : \mathbf{X} \to \mathbf{1}$) caratterizza invece l'oggetto ' finale ' $\mathbf{1}$, in cui è riconoscibile l'insieme costituito da un unico elemento.

Essendo entrambe le proprietà universali, l'oggetto finale e quello iniziale restano determinati a meno di una biezione. Con ciò il principio costitutivo dello strutturalismo (l'irrilevanza matematica delle differenze sussistenti tra esemplari isomorfi) regola sin dal sistema d'assiomi il criterio d'individuazione a cui la teoria dovrà attenersi, e viene sfruttato sino in fondo: in tal modo l'inclusione $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ viene interpretata semplicemente come un monomorfismo[22] $m : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, ossia come un'applica-

[20] Formulata originariamente da Samuel nel 1948 al di fuori dell'impostazione categoriale (cfr. pp. 219-220, questo testo), la nozione di ' universalità ' ha assunto nella teoria delle categorie una posizione centrale, sussumendo una molteplicità di situazioni chiave che ne ampliano la primitiva accezione.

[21] F. W. Lawvere, *An elementary theory of the category of sets*, « Proceedings of the National Academy of Science », XXXII (1964).

[22] m: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ si dice *monomorfismo* se per ogni coppia di morfismi (della stessa categoria) s, t: $\mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ l'uguaglianza $s \cdot m = t \cdot m$ implica $s = t$ (in tal caso si dice anche che m è ' cancellabile a destra '). Nella categoria degli insiemi i monomorfismi coincidono con le applicazioni iniettive.

zione iniettiva (in effetti il dominio, risultando in ogni caso isomorfo ad un sottoinsieme del codominio, può essergli identificato). La relazione d'appartenenza $x \in \mathbf{X}$ viene definita conseguentemente come un morfismo $x : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{X}$, che — in termini intuitivi — trasceglie l'elemento x come immagine dell'unico elemento appartenente all'insieme unitario. Anche le operazioni insiemistiche fondamentali vengono descritte come costruzioni universali in cui le sole nozioni primitive che compaiono con quelle di morfismo (da pensarsi in senso puramente astratto), dominio, codominio e composizione. Oltre ai prodotti e — caratterizzate dalla proprietà duale — alle somme, gli assiomi richiedono, per ogni coppia di oggetti $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, l'esistenza dell'oggetto $\mathbf{Y}^{\mathbf{X}}$ che può essere concepito come l'insieme di tutte le applicazioni $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$. L'insieme delle parti $\mathfrak{P}(\mathbf{X})$ ne rappresenta un caso particolare, potendo essere reso dall'oggetto $\mathbf{2}^{\mathbf{X}}$, l'insieme delle applicazioni $\chi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{2}$, identificabili con le funzioni caratteristiche dei sottoinsiemi di $\mathbf{X}$[23].

A conclusione del suo articolo Lawvere dimostra che ogni categoria completa che soddisfi gli assiomi del sistema è equivalente a quella degli insiemi e delle applicazioni. Sotto l'ipotesi supplementare della completezza (non esprimibile in un linguaggio del prim'ordine) il sistema caratterizza dunque la categoria degli insiemi a meno d'equivalenze; tuttavia, dal momento che la richiesta si riduce in questo caso alla chiusura della categoria rispetto a somme e prodotti arbitrari (e non semplicemente finiti, come gli assiomi asserivano), tanto valeva incorporarla nel sistema. In effetti, perché la teoria degli insiemi possa essere sviluppata compiutamente, quelle operazioni sembrano indispensabili; inoltre, se lo scopo è quello di dimostrare la sua traducibilità in termini categoriali, il preziosismo del primo ordine può essere sacrificato. Perché, dunque, attenerglisi? Precisamente perché lo scritto coltiva ambizioni epistemologiche che non s'arrestano ad una semplice procedura di confronto, ma si prefiggono d'esautorare la teoria degli insiemi quale principio esplicativo del discorso matematico per insediare al suo posto la dottrina categoriale. Il lavoro sembra cosí configurarsi come semplice capitolo introduttivo dell'ambizioso progetto, come se non avesse di meglio da proporsi se non di spianare la strada all'instaurazione di un nuovo assolutismo. Il valore che pure presenta in sé finisce cosí col dissolversi nella mera dimostrazione di praticabilità di quella prospettiva: dalla teoria delle categorie è derivabile quella degli insiemi, e cosí sia!

[23] $\mathbf{2}$ rappresenta l'insieme costituito da due elementi.

Di fatto l'articolo si conclude preannunciando l'urgenza di rivolgersi alla categoria delle categorie quale ambito piú adeguato di compimento fondazionale, un'esigenza che viene esaudita in uno scritto successivo dello stesso Lawvere [24]. Esaminare questa e le ulteriori tappe attraverso cui si dispiega il programma di revisione categoriale dei fondamenti esula dagli scopi di questo capitolo. Della carriera del paradigma esiste una storia pubblica, altisonante, ' scandalosa ', che si presta ad esser divulgata in forma di *slogans*: quella, appunto, della resa dei conti con la legislazione insiemistica. Ma, accanto a questa, ne esiste un'altra, assai piú sottile e discreta, che, se con la precedente convive e spesso si confonde, non vi si lascia tuttavia ricondurre per intero: è quella costituita da risultati non asserviti ad un'angusta prospettiva riduzionistica, ma effettivamene esplicativi, dotati d'interesse intrinseco. Nel tentativo d'affermazione del paradigma si possono distinguere di conseguenza gli intenti cognitivi da quelli puramente normativi, spesso altrettanto dogmatici del ' monolitismo ' insiemistico stigmatizzato da Mac Lane: di per sé un'operazione riduzionistica non ci comunica altro che, fino ad uno stadio determinato, una fondazione categoriale è praticabile; di questa, tuttavia, quella rappresenta soltanto il lavoro preparatorio, la fase esplorativa. Quanto alla sua attuazione, essa deve venire conseguita altrimenti: e s s e r e g u a d a g n a t a s u l c a m p o .

L'autorevolezza della teoria delle categorie (per lo meno in senso strumentale) proviene dai territori di ricerca — come l'algebra omologica o la topologia algebrica — cui essa fornisce la propria chiave metodica, mentre le sue risorse espressive vi sono utilizzate liberamente. Accanto a questo movimento propulsivo se ne trova un altro, riflesso, che innalza la teoria alla dignità di paradigma ampliandone lo spettro d'intervento mediante la riappropriazione del noto, riveduto alla luce del nuovo indirizzo interpretativo: qui risiede la revisione dei fondamenti, qui — pure — la riformulazione categoriale del concetto di struttura.

In questo movimento di ritorno, in quest'investigazione retrospettiva, per poter sperare di guadagnar credito epistemologico presso la comunità scientifica evidentemente non basta il semplice responso riduzionistico. Occorre invece che, sotto l'inedita prospettiva, un dominio matematico si lasci esplorare piú a fondo, rivelando connessioni prece-

[24] F. W. Lawvere, *The category of categories as a foundation for mathematics*, in *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965* (Springer 1966).

dentemente non riscontrabili; che essa, cioè, migliori il rendimento di una nozione, elevandone qualitativamente il livello d'intelligibilità.

Certo, in simili frangenti sarebbe ingenuo pretendere una conduzione ' disinteressata ' del discorso matematico: la posta in gioco è infatti il predominio ideologico tra scuole in competizione. Anzi, proprio perché questa circostanza distoglie l'argomentazione dal settostare alle sole preoccupazioni d'ordine scientifico, sarebbe interessante tentare un' analisi retorica delle strategie persuasorie delle parti in causa, rilevando — al di là delle ' prove ' effettivamente esibite — la topica attraverso cui la disputa si svolge: che cosa si ritiene ' decida ' l'autorità di un argomento, qual è il sistema dei presupposti implicato, e cosí via. Sicuramente s'otterrebbe un resoconto fedele sulle credenze e le tacite ammissioni che popolano l'ideologia corrente dei matematici. Le mosse attraverso cui il paradigma categoriale intende procacciarsi prestigio, le speculazioni metafisiche (di discutibile fattura) che l'hanno accompagnato [25], le polemiche che ha suscitato, le ' confutazioni ' che gli sono state opposte [26]: tutto ciò conduce il filosofo in un osservatorio privilegiato alquanto istruttivo sul senso del f a r e e dell' i n t e r r o g a r e in matematica.

Del fare: cioè dello sviluppare ricerche all'interno di un determinato paradigma; dell'interrogare: cioè del misurare fino a che punto una regione del sapere data per acquisita vi si lasci interpretare.

Ed è precisamente sotto forma d'interrogazione che si prospetta il quesito sulle strutture. L'interpretazione categoriale degli insiemi non ne ha fornito che una risposta parziale: gli insiemi, in quanto specie di struttura, venivano caratterizzati attraverso le proprietà della categoria corrispondente; queste, tuttavia, non facevano che ricalcare (seppure tradotte in termini di diagrammi) le fondamentali postulazioni insiemistiche e ciò accadeva precisamente perché gli insiemi rappresentano strut-

[25] Con il raffinarsi degli strumenti teorici a sua disposizione, il paradigma categoriale non sembra piú contentarsi della genericità delle sue prime enunciazioni programmatiche, cercando invece risonanze ideologiche piú impegnative: cosí Lawvere sembra aver trovato nel materialismo dialettico il riscontro epistemologico della teoria dei *topoi.*

[26] Sulle riserve della parte avversa si vedano, per esempio, G. Kreisel, *Category theory and the foundation of mathematics* (in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, cit.) e *Observations on popular discussions of foundations* (in *Axiomatic Set Theory*, cit.); Y. Gauthier, *La théorie des catégories et la théorie des topoi comme langages fondationnelles* (cap. IV di *Fondements des Mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976).

ture degeneri, prive di architettura interna e definite semplicemente dalle operazioni cui sottostanno (quelle che si situano, appunto, a livello categoriale). D'altro canto non è per nulla ovvio che questo tipo d'approccio possa esser riproposto per altre specie di struttura. Caratterizzare una specie assumendo come discriminanti non le proprietà valide in ogni struttura singolarmente considerata, ma quelle valide nella corrispondente categoria è, presumibilmente, sempre possibile, per lo meno caso per caso: per esempio la categoria dei gruppi possiede un oggetto ' nullo ' (ossia simultaneamente iniziale e finale[27]) e questa circostanza la distingue da altre categorie, come quella degli insiemi. Ma non è detto che questa strada possa rivelare un legame diretto tra la specie di struttura e l'algebra dei morfismi che la preservano, tra l'assetto interno delle singole strutture e il loro contegno categoriale. In mancanza di un nesso di questo genere, l'interpretazione delle strutture in quanto oggetti di una categoria rimane estrinseca ed il problema di assegnare loro un significato generale all'interno dell'impianto categoriale resta aperto.

Gli scritti che prenderemo in esame ne prospettano differenti accezioni, configurandosi — ciascuno a suo modo — come ricognizioni obiettive, quando con ciò non s'intenda un mero accertamento formale che ponga a confronto linguaggi senza vita, spogliati d'ogni significato, bensí — piú profondamente — la circostanza per cui i fatti matematici sono suscettibili di interpretazioni distinte che ne approfondiscono il livello della comprensione. Se ciò avviene è perché essi si presentano precisamente come f a t t i , cui occorre riconoscere dunque un certo modo di darsi o, in altre parole, una forma di realtà (autonoma, ma non indifferente agli schemi teorici attraverso cui si lascia indagare), solo che ci si affranchi dagli stereotipi del realismo spicciolo che governa la concezione comune del mondo esterno.

2. - Prolegomeni all'interpretazione funtoriale delle strutture.

Nell'anno in cui Bourbaki dà alle stampe la versione ' formalizzata ' della sua teoria delle strutture, nell'articolo di Ehresmann *Gattungen von lokalen Strukturen* appare la prima formulazione categoriale del concetto[28].

[27] Il gruppo costituito da un solo elemento, l'unità.

[28] « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », LX (1957).

Ciò che di una specie il punto di vista categoriale ritiene, è anzitutto la trasportabilità delle strutture: se σ è una struttura di specie $\mathcal{S}$, X il suo insieme di sostegno e $f : X \rightarrow Y$ una biezione, esiste un'unica struttura isomorfa a σ definita su Y per mezzo della biezione f. Il trasporto di struttura viene così interpretato come una corrispondenza tra oggetti (insiemi supporto e strutture su di essi definibili) e frecce [29] (biezioni tra insiemi, isomorfismi tra strutture).

Nel caso piú semplice, in cui la specie presupponga un unico insieme di sostegno, se si tralasciano i modi in cui le strutture vengono costruite esplicitamente, la situazione categoriale riscontrabile è quella di un funtore definito sulla categoria degli insiemi e delle biezioni a valori nella medesima categoria. Ciò suggerisce una definizione piú astratta, che prescinda dalla circostanza che i supporti delle strutture siano insiemi e consenta invece di assegnare una specie di struttura sugli oggetti di una categoria differente, come accade per gli spazi topologici muniti della struttura gruppale.

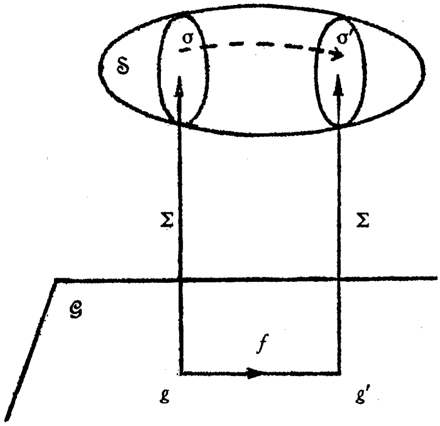
Poiché, per il momento, sono i soli isomorfismi che interessano, il dominio di un generico funtore di struttura sarà costituito da una categoria in cui ogni freccia risulti invertibile. Una tale categoria è chiamata ' gruppoide '. Se $\mathcal{G}$ è un gruppoide e $\Sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{INS}$ un funtore a valori nella categoria degli insiemi e delle biezioni che faccia corrispondere ad oggetti distinti di $\mathcal{G}$ insiemi disgiunti, un elemento σ dell'insieme $\Sigma(g)$ può essere considerato una ' struttura ' sull'oggetto g di $\mathcal{G}$. L'insieme $\Sigma(g)$ rappresenta dunque la famiglia delle strutture definibili su g, che diviene in tal modo il loro supporto. La riunione degli elementi degli insiemi $\Sigma(g)$ ottenuti al variare degli oggetti del gruppoide $\mathcal{G}$ definisce allora una ' specie di struttura ' $\mathcal{S}$.

Se $f : g \rightarrow g'$ è una freccia di $\mathcal{G}$, la sua immagine attraverso il funtore Σ determina un'applicazione biunivoca $\Sigma(f) : \Sigma(g) \rightarrow \Sigma(g')$ che, interpretata ' puntualmente ', pone in corrispondenza una coppia di strutture σ e σ' definite rispettivamente sugli oggetti g e g'. Munendo la specie $\mathcal{S}$ degli isomorfismi provenienti dalle frecce definite sugli oggetti sup-

[29] Divenuto sinonimo di ' morfismo ' in seguito all'emancipazione epistemologica della teoria delle categorie, il termine ' freccia ' [*arrow*] (che l'avvicina piú alla teoria dei grafi che non a quella degli insiemi), sottolinea la natura completamente indeterminata che possono assumere gli elementi di una teoria astratta. In questo paragrafo, intenderemo i morfismi sempre in relazione all'assegnamento di una specie di struttura all'interno di una categoria data (con i suoi oggetti e, appunto, le sue frecce).

porto si ottiene un gruppoide $\bar{\mathfrak{S}}$ (detto ' gruppoide degli isomorfismi ' di specie $\mathfrak{S}$).

La seguente figura permette di visualizzare la situazione



Si ricava cosí una descrizione categoriale dei meccanismi che governano il trasporto di struttura. Al suo interno è possibile riformulare il quadro delle interrelazioni tra specie diverse. Per esempio, una specie $\mathfrak{S}$ definita sul gruppoide $\mathcal{G}$ si dirà ' soggiacente ' alla specie $\mathfrak{S}'$ definita $\mathcal{G}'$ se $\mathcal{G}'$ è un sottogruppoide di $\mathcal{G}$ e se è dato un funtore tra i rispettivi gruppoidi degli isomorfismi $\Phi : \bar{\mathfrak{S}}' \rightarrow \bar{\mathfrak{S}}$ che preserva i supporti delle strutture.

Se, inoltre, il funtore Φ stabilisce un isomorfismo (categoriale) tra i gruppoidi $\mathcal{G}'$ e $\mathcal{G}$ (il che implica l'identificabilità dei rispetti gruppoidi di base $\mathcal{G}'$ e $\mathcal{G}$), le specie corrispondenti $\mathfrak{S}'$ e $\mathfrak{S}$ vengono dette ' equivalenti '. Riformulando la condizione al livello dei funtori Σ' e Σ che definiscono le due specie, la loro equivalenza si traduce nella richiesta di un'equivalenza naturale $\eta : \Sigma' \rightarrow \Sigma$. Ciò significa che le strutture di specie $\mathfrak{S}'$ e $\mathfrak{S}$ definibili su un oggetto di $\mathcal{G}$ sono poste in una corrispondenza biunivoca che preserva gli isomorfismi strutturali. Restringendosi al caso di strutture definite sugli insiemi, si riottiene cosí la definizione ordinaria dell'equivalenza tra specie.

I morfismi vengono quindi introdotti considerando una specie $\mathfrak{S}$ come classe di oggetti di una categoria $\mathfrak{M}$ che contenga il gruppoide $\mathcal{G}$ come propria sottocategoria. $\mathfrak{M}$ si dice allora ' categoria dei morfismi ' associati alla specie $\mathfrak{S}$. Se, inoltre, $\bar{\mathfrak{S}}$ coincide con il gruppoide delle frecce invertibili di $\mathfrak{M}$, le frecce di $\mathfrak{M}$ vengono dette ' omomorfismi ' associati a $\mathcal{S}$[30].

La collocazione funtoriale della nozione di specie di struttura rappresenta d'altra parte il prologo della trattazione delle ' strutture locali ', che consentono di inquadrare in una prospettiva unificante le situazioni fondamentali della geometria differenziale.

In breve, la costruzione può essere cosí riassunta: si supponga data su un gruppoide $\mathcal{G}$ una relazione d'ordine $f' < f$ (che possiamo pensare in termini di ' restrizione '), compatibile con dominio, codominio e composizione delle frecce. Associando ad ogni freccia f del gruppoide la sezione $\{f' \in \mathcal{G} \mid f' < f\}$ che essa determina, si definirà $f \cap f'$ come intersezione delle sezioni corrispondenti. Si richiede inoltre che ogni classe di frecce F ammetta un confine superiore f^*, e si pone $\bigcup F = f^*$. Le operazioni di unione e intersezione possono quindi essere applicate agli oggetti del gruppoide, identificandoli con le frecce identiche. Ammettendo un elemento 0 di $\mathcal{G}$ corrispondente alle intersezioni vuote, si ottiene infine una struttura di reticolo definita sul gruppoide. Se il reticolo risulta distributivo relativamente agli oggetti[31], $\mathcal{G}$ verrà detto ' gruppoide locale '.

Una ' specie di strutture locali ' su $\mathcal{G}$ è allora una specie $\mathcal{S}$ definita da un funtore Σ che induce sul gruppoide degli isomorfismi $\bar{\mathcal{S}}$ la struttura di $\mathcal{G}$, rendendolo a sua volta un gruppoide locale. L'unione e l'intersezione delle strutture risultano compatibili con quelle relative agli oggetti di sostegno[32]. Due strutture σ e σ' si dicono allora ' localmente isomorfe ' se esiste una famiglia di isomorfismi $\{\Phi_i : \sigma_i \rightarrow \sigma'_i\}_{i \in I}$ tali che, per ogni $i \in I$, $\sigma_i < \sigma$, $\sigma'_i < \sigma'$ e $\bigcup \{\sigma_i\} = \sigma$. La famiglia $\{\Phi_i\}$ viene in tal caso chiamata a t l a n t e di σ su σ'.

[30] La medesima situazione può essere riferita al gruppoide di sostegno $\mathcal{G}$, assumendolo come sottocategoria o gruppoide degli elementi invertibili di una categoria $\mathcal{C}$ avente la stessa classe di oggetti. Cosí facendo, i morfismi e gli omomorfismi relativi a una specie $\mathcal{S}$ su $\mathcal{G}$ si possono definire come immagini delle frecce della categoria $\mathcal{C}$ attraverso un funtore ' fedele ' che, ristretto agli oggetti, coincide con quello definente la specie in questione.

[31] La condizione è espressa dall'uguaglianza $(\bigcup A) \cap g' = \bigcup_{g \in A} (g \cap g')$.

[32] Se g è un oggetto di $\mathcal{G}$, la sottoclasse della sezione determinata da g, chiusa rispetto all'intersezione finita e all'unione arbitraria e contenente g e 0, è detta ' paratopologia ' su g. Le paratopologie definibili sugli oggetti di $\mathcal{G}$ costituiscono un esempio di specie di strutture locali; esse consentono di riformulare numerose proprietà topologiche (quali connessione, compattezza ecc.) senza far riferimento ai punti.

Il linguaggio degli atlanti, in cui s'articola la descrizione di specie locali come gli spazi fibrati e gli spazi fogliati, delimita il contesto teorico rispetto al quale la definizione generale di specie rappresenta evidentemente la fase preparatoria: concepita in vista delle esigenze tematiche che vi debbono trovar fondamento, questa può allora limitarsi a considerare le strutture dall'esterno, ossia dal modo in cui s'organizzano in una specie. In rapporto alla particolarità dell'indagine ciò risulta piú che soddisfacente: i rapporti tra specie che sono rilevanti dal punto di vista locale (innanzitutto l'ampliamento e il completamento delle categorie associate) vi trovano infatti una formulazione precisa.

In una prospettiva piú generale, tuttavia, fino a che punto la versione funtoriale della nozione di specie è in grado di far presa su situazioni determinate? Sappiamo che l'equivalenza tra specie (in senso ordinario) trova un esatto riscontro nell'isomorfismo dei gruppoidi associati; la disposizione categoriale delle specie è dunque sufficiente a caratterizzarle a meno d'equivalenze. D'altra parte, la struttura particolare di un gruppoide di isomorfismi non è mai assunta a sé, come dotata di caratteristiche proprie, ma sempre in quanto determinata da un funtore nella cui azione è presupposta la definizione esplicita di una specie di struttura.

Cosí il ricupero dei casi ' concreti ' (ovverosia le specie comunemente costruite sugli insiemi) ricalca lo schema bourbakista fondato sulla composizione e l'iterazione delle operazioni insiemistiche $\mathfrak{P}$ e $\times$, mostrando semplicemente come esso sia suscettibile di un'interpretazione funtoriale. Ristretta a quest'ambito, l'ambientazione categoriale delle strutture sembra dunque limitarsi a registrare le conseguenze della definizione ordinaria [33].

D'altro canto, all'estrema generalità prospettata dalla definizione di Ehresmann non sembra far riscontro un adeguato livello di precisione ' sintattica '. Nel suo impianto, in effetti, non esiste qualcosa in cui sia riconoscibile il significato astratto di struttura: una specie rimane un semplice agglomerato di oggetti, riunione dei valori di un funtore che ne dissimula i meccanismi di generazione. Di esso è presupposta pu-

[33] Il medesimo indirizzo di ricerca verrà proseguito da Ehresmann in un successivo lavoro in cui viene esplorata la struttura della categoria dei funtori ottenuti per composizione, iterazione e passaggio al limite di $\mathfrak{P}$ e $\times$; tali funtori, ristretti al caso finito, determinano le ' caratterizzazioni tipiche ' nel senso di Bourbaki (cfr. *Catégorie des Foncteurs Types*, « Revista de la Union Matematica Argentina », XX, 1960). Il punto di vista ' costruttivo ' della teoria è stato precisato da G. Blanc nello scritto *Foncteurs types et structures* (Amiens, Esquisse Mathématiques, XIV, 1972).

ramente l'azione; ma a dominî diversi corrispondono diversi funtori e in tal modo la struttura di gruppo, per esempio, si sdoppia a seconda che il relativo funtore sia definito sugli insiemi o sugli spazi topologici, né si vede come poterne ripristinare l'identità. Eppure, ammettendo la definibilità di un funtore di struttura su categorie qualsiansi, il testo sembrava interpretarne l'esigenza [34].

In conclusione, l'impostazione di Ehresmann non risolve se non in minima parte gli interrogativi che il paradigma propone naturalmente. Ma se ciò accade, è perché Ehresmann non ne condivide le ambizioni: ogni attitudine fondatrice gli sembra estranea, mentre i suoi intenti paiono piuttosto ' descrittivi '. Il linguaggio insiemistico e quello categoriale vengono cosí mescolati liberamente, senza preoccuparsi di distinguerne gli apporti (del resto, le costruzioni categoriali sono interpretate all'interno di una teoria delle classi).

Il suo resta, nondimeno, il primo tentativo di ambientare categorialmente la tematica delle strutture.

3. - LA PROSPETTIVA DELLA SEMANTICA FUNTORIALE.

Tocca a Lawvere compiere il passo decisivo in questa direzione. Nella sua dissertazione di dottorato del 1963 [35], delle strutture guadagna un piano d'esistenza piú riposto, in grado non solo di descrivere il dispiegamento estensionale della nozione, ma anche di accedere al suo funzionamento in quanto pura forma. Nel far questo Lawvere non sceglie l'appostamento piú generale, che prometterebbe scarse conseguenze, ma ripercorre la prospettiva rivelatasi storicamente come la piú feconda, quella dell'algebra universale.

Nell'ottica di questa disciplina, una struttura algebrica è — nell'ac-

[34] L'approfondimento della tematica delle ' categorie strutturate ' (categorie i cui oggetti siano muniti di strutture supplementari) condurrà in effetti Ehresmann ad approntare un'analisi intrinseca delle strutture che esamineremo in un successivo paragrafo.

[35] F. W. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, New York, Columbia University, 1963 (inedito). La notazione adottata da Lawvere in questo frangente è abbastanza infelice. Nell'esposizione preferiamo pertanto fare riferimento alla versione ' migliorata ' della teoria, assai piú accessibile dal punto di vista intuitivo, presentata da Lawvere nei due articoli *Functorial semantics of algebraic theories* (« Proceedings of the National Academy of Science », L, 1963) e *Algebraic theories, algebraic categories, and algebraic functors* (in *Symposium on the theory of models*, Amsterdam, North-Holland, 1965).

cezione piú semplice — un insieme munito di operazioni, vale a dire di applicazioni definite su un prodotto finito dell'insieme di sostegno a valori nell'insieme medesimo. L'ambito del confronto tra strutture è costituito dai ' tipi di similarità ', indicazioni di simboli d'operazione con arietà specificata: un omomorfismo tra algebre ' simili ' è allora un'applicazione tra i rispettivi insiemi di sostegno che preserva le operazioni.

I concetti particolari di struttura, ovverosia le specie, s'ottengono imponendo alle operazioni di un tipo condizioni determinate, formulabili in molti casi — certo i piú significativi per l'algebra universale — come equazioni tra espressioni formate a partire dalle operazioni del tipo. La classe delle strutture di un dato tipo che soddisfano un sistema d'assiomi costituisce notoriamente una categoria rispetto agli omomorfismi che vi sono definiti. Il linguaggio categoriale, tuttavia, riesce ad insinuarsi anche sul piano intensionale, nel momento definitorio dello stesso concetto di struttura algebrica.

Nell'impostazione di Lawvere i tipi e le specie sono riformulati in forma categoriale nella nozione di ' teoria algebrica ': questa è una categoria piccola **T** il cui insieme degli oggetti è costituito dai numeri naturali *0*, *1*, *2* ... in cui ogni n rappresenta il prodotto n-esimo $1 \times 1 \times \ldots \times 1$ dell'oggetto *1*. Poiché il prodotto è determinato (a meno d'isomorfismi) dal sistema delle proiezioni $\pi_{n,i} : n \to 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$, esse faranno parte dell'insieme delle frecce d'ogni teoria algebrica. Per ' operazione n-aria ' di T s'intende una sua freccia arbitraria $f : n \to 1$, di cui le proiezioni costituiscono dunque un esempio (in generale non l'unico). Infine, una freccia $\underline{f} : m \to n$ di **T** è identificabile con una m-pla $< f_1, f_2, \ldots, f_m >$ di sue operazioni n-arie.

La nozione di teoria algebrica rappresenta cosí un ' completamento ' di quella di tipo: accanto alla collezione delle ' operazioni ' che compongono quest'ultimo, la teoria algebrica contiene tutte quelle ottenibili per composizione delle prime, delle proiezioni e delle n-ple di operazioni di uguale arietà. In tal modo l'interpretazione dei simboli di operazione e delle arietà associate sotto forma di frecce $f : n \to 1$ consente di riportare alla composizione tra frecce le costruzioni sintattiche relative alla formazione di espressioni derivate, giustificando la struttura categoriale che ne delimita il sistema di chiusura.

In effetti, un tipo di similarità Ω è rappresentabile come famiglia di insiemi disgiunti $\{\Omega_n\}_{n \in N}$ in cui gli indici corrispondono alle arietà dei simboli d'operazione. Interpretando allora gli elementi di ciascun Ω_n

come frecce $\omega : n \rightarrow 1$, aggiungendovi le proiezioni $\pi_{n,i} : n \rightarrow 1$, ammettendo la formazione di operazioni 'multiple' $< \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m > : n \rightarrow m$ ed esplicitando le condizioni di componibilità delle frecce cosí definite, si ottiene una teoria algebrica $\mathbf{T}_\Omega$, 'generata' dalle operazioni del tipo Ω. Viceversa, l'insieme $\{Morf_{\mathbf{T}}(n,1)\}_{n \in N}$ delle operazioni di una teoria algebrica $\mathbf{T}$ definisce un tipo di similarità $\Omega_{\mathbf{T}}$ che, della struttura categoriale di $\mathbf{T}$, ritiene le sole frecce di codominio 1.

Se consideriamo come morfismi tra teorie algebriche i funtori tra loro definiti che preservano i prodotti finiti ed inviano l'oggetto 1 in se stesso, la corrispondenza appena descritta determina un'aggiunzione $L \dashv D$

$$\mathfrak{T} \underset{L}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \mathbf{INS}^N \qquad (\text{dove } D(\mathbf{T}) = \Omega_{\mathbf{T}},\ L(\Omega) = \mathbf{T}_\Omega)$$

tra la categoria $\mathfrak{T}$ delle teorie algebriche e dei relativi morfismi e la categoria delle famiglie di insiemi indiciate dai naturali [36], i cui morfismi sono costituiti dalle famiglie d'applicazioni $\{\alpha_n : \Omega_n \rightarrow \Omega'_n\}$.

D'altra parte, anche le specie equazionali sono suscettibili di un'interpretazione analoga. In effetti, definire una specie attraverso un sistema di equazioni significa assegnare una famiglia di identità tra espressioni ottenute dai termini primitivi (simboli di funzione, costanti, variabili) di un determinato tipo Ω. Ora, tali espressioni possono essere viste come operazioni derivate di eguale arietà, ossia come frecce della teoria 'libera' $\mathbf{T}_\Omega$ generata dal tipo. Il sistema d'assiomi può dunque essere rappresentato come un insieme di coppie (f,f') appartenenti all'insieme $\bigcup_{n \in N} \{Morf_{\mathbf{T}_\Omega}(n,1) \times Morf_{\mathbf{T}_\Omega}(n,1)\}$. Possiamo allora considerare la relazione d'equivalenza che tali coppie determinano, ed estenderla poi ai prodotti di frecce di egual dominio (operazioni 'multiple') ed alla composizione. Si ottiene in tal modo una relazione di congruenza $\mathfrak{R}$ compatibile con le leggi strutturali che intervengono nella definizione di $\mathbf{T}_\Omega$. È dunque possibile costruire la categoria quoziente $\frac{\mathbf{T}_\Omega}{\mathfrak{R}}$ (anch'essa teoria algebrica nel senso di Lawvere), nella quale vengono identificate non soltanto le operazioni collegate dagli assiomi, ma pure quelle la cui uguaglianza è derivabile. La categoria quoziente $\frac{\mathbf{T}_\Omega}{\mathfrak{R}}$ contiene cosí le

[36] Nei cui oggetti, come s'è visto, possono essere identificati i tipi di similarità.

' conseguenze ' degli assiomi (il che giustifica la denominazione di t e o - r i a) e la specie da cui s'era partiti non ne costituisce che una delle possibili ' presentazioni ' accanto alle altre — eventualmente riferite a tipi diversi — che la teoria parimenti esprime.

Poiché ogni teoria algebrica può essere considerata, a meno d'isomorfismi, la teoria quoziente indotta da una presentazione, si ricava che le teorie algebriche costituiscono una formulazione delle specie (equazionali) invariante rispetto al sistema d'assiomi e ai simboli primitivi su cui queste si basano [37].

La portata di quest'impostazione, tuttavia, non risulta appieno se non quando venga riferita all'aspetto semantico ed ai meccanismi attraverso cui esso si lascia esprimere.

Nell'accezione classica una struttura di un dato tipo Ω è costituita da un insieme X e da una famiglia di applicazioni $X^n \to X$, associate biunivocamente ai simboli di operazione del tipo, rispettandone le arietà. Passando dai tipi alle teorie, il momento interpretativo diviene una corrispondenza da una teoria algebrica $\mathbf{T}$ a valori negli insiemi. Una $\mathbf{T}$-algebra è dunque un funtore $\mathcal{A} : \mathbf{T} \to \mathbf{INS}$ che preserva i prodotti finiti (sostituti delle arietà); un assegnamento semantico invia dunque una freccia $f : n \to 1$ di $\mathbf{T}$ in un'applicazione $f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$, dove A rappresenta l'immagine dell'oggetto 1 attraverso il funtore $\mathcal{A}$, mentre A^n ne è

[37] Consideriamo, per esempio, la definizione di gruppo fornita dagli assiomi

$$x \cdot (x)^{-1} = u \qquad x \cdot u = x \qquad x \cdot (y \cdot (z)) = (x \cdot y) \cdot z$$

relativi al tipo $\Omega = \{u, (\ )^{-1}, \cdot\}$. Tradotti nel linguaggio categoriale, essi equivalgono alla postulazione di tre operazioni

$$u : 0 \to 1 \qquad f_1 : 1 \to 1 \qquad f_2 : 2 \to 1$$

che rendano commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "<id, f_1>"] \arrow[d, "0"'] & 1 \arrow[d, "f_2"] \\
0 \arrow[r, "u"'] & 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "<id, 0 \cdot u>"] \arrow[dr, "id"'] & & 1 \times 1 \arrow[dl, "f_2"] \\
& 1 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times 1 \times 1 \arrow[r, "<\pi_{3,1}, f_2(\pi_{3,2}, \pi_{3,3})>"] \arrow[d, "<f_2(\pi_{3,1}, \pi_{3,2}), \pi_{3,3}>"] & 1 \times 1 \arrow[d, "f_2"] \\
1 \times 1 \arrow[r, "f_2"'] & 1
\end{tikzcd}$$

in cui le proiezioni prendono il posto delle variabili. Le operazioni composte che intervengono nel sistema d'assiomi sono morfismi della teoria $L(\Omega)$ generata dal tipo Ω, mentre la commutatività dei diagrammi induce tra loro una relazione di equivalenza. La costruzione del quoziente determina la teoria algebrica dei gruppi $\mathbf{G}$, che prescinde dalle particolarità del tipo e delle equazioni attraverso cui è stata ' presentata '.

il prodotto n-esimo $\mathcal{A}(1) \times \ldots \times \mathcal{A}(1)$, le cui proiezioni sono le immagini delle $\pi_{n,i} : n \rightarrow 1$ in $\mathbf{T}$.

La classe dei funtori $\mathcal{A} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{INS}$ che preservano i prodotti finiti è inoltre identificabile con la varietà delle algebre corrispondenti ad una qualsiasi presentazione della teoria $\mathbf{T}$, mentre un omomorfismo tra $\mathbf{T}$-algebre viene espresso da una trasformazione naturale tra i funtori che le definiscono.

In effetti, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono $\mathbf{T}$-algebre e $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è una trasformazione naturale, a ciascun oggetto n di $\mathbf{T}$ viene associata un'applicazione $\tau_n : A^n \rightarrow B^n$ in modo che per ogni $f : n \rightarrow 1$ di $\mathbf{T}$ il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[d, "f_{\mathcal{A}}"'] & B^n \arrow[d, "f_{\mathcal{B}}"] \\ A \arrow[r, "\tau_1"'] & B \end{tikzcd}$$

risulti commutativo. Poiché ciò vale in particolare per le proiezioni $\pi_{n,i} : n \rightarrow 1$, τ_1 s'identifica con l'n-pla di applicazioni $< \tau_1, \ldots, \tau_1 >$.

Munita di queste frecce, la classe delle $\mathbf{T}$-algebre forma una categoria che denoteremo con $\mathbf{T}$-ALG: cosí se $\mathbf{G}$ è la teoria algebrica dei gruppi, la categoria $\mathbf{G}$-ALG s'identifica, a meno d'isomorfismi, con la categoria dei gruppi e degli omomorfismi gruppali che si considera ordinariamente assumendone gli oggetti come ' dati ', mentre in questo frangente gli stessi sono ispezionati nel loro assetto costitutivo in una prospettiva puramente categoriale.

Possiamo proseguire in questa direzione facendo corrispondere ad ogni $\mathbf{T}$-algebra $\mathcal{A} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{INS}$ il suo insieme sostegno $A = \mathcal{A}(1)$. Si ottiene cosí un funtore $S_{\mathbf{T}} : \mathbf{T}\text{-ALG} \rightarrow \mathbf{INS}$ che individua la classe degli insiemi su cui è definibile una struttura di $\mathbf{T}$-algebra.

Infine, se $\phi : \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T}$ è un morfismo tra teorie algebriche, per ogni T-algebra $\mathcal{A}$ il funtore composto $\phi \cdot \mathcal{A} : \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{INS}$ preserva i prodotti e definisce pertanto una $\mathbf{T}'$-algebra. Il funtore $\Phi : \mathbf{T}\text{-ALG} \rightarrow \mathbf{T}'\text{-ALG}$, che ad ogni $\mathbf{T}$-algebra associa una $\mathbf{T}$-algebra per composizione del morfismo ' sintattico ' Φ, viene allora detto ' funtore algebrico '. Per il modo in cui è stato definito, è chiaro che esso preserva gli insiemi sostegno, ovverosia rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}\text{ ALG} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "S_{\mathbf{T}}"'] & & \mathbf{T}'\text{-ALG} \arrow[dl, "S_{\mathbf{T}'}"] \\ & \mathbf{INS} & \end{tikzcd}$$

Con ciò si completa l'apparato definitorio preposto alla descrizione del processo semantico delle teorie algebriche. Interpretando il percorso

teoria → strutture modello → insiemi soggiacenti

come la sua articolazione interna, Lawvere definisce il funtore (controvariante) ' semantica ' associando ad una teoria algebrica $\mathbf{T}$ il corrispondente funtore ' supporto ' S, ad un'interpretazione sintattica tra teorie $\phi : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}$ il relativo funtore algebrico $\Phi : \mathbf{T}\text{-ALG} \to \mathbf{T}\text{-ALG}$. Come codominio del funtore ' semantica ' Lawvere assegna un contesto più ampio, in cui risulti significativa la possibilità di delineare un percorso inverso che da categorie ' concrete ' conduca alle teorie. La categoria prescelta è allora $\mathfrak{F}_*(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS})$, che ha come oggetti i funtori $F : \mathcal{C} \to \mathbf{INS}$, dove $\mathcal{C}$ è un'arbitraria categoria con prodotti e F è tale che le trasformazioni naturali $\nu : F^n \to F$ formano un insieme [38]. Un morfismo tra due oggetti $F : \mathcal{C} \to \mathbf{INS}$ e $F' : \mathcal{C}' \to \mathbf{INS}$ di $\mathfrak{F}_*$ $(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS})$ è dato da un qualsiasi funtore $\Gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C}' \arrow[dl, "F'"] \\ & \mathbf{INS} & \end{tikzcd}$$

Per poter determinare un funtore che ad un oggetto $F : \mathcal{C} \to \mathbf{INS}$ della categoria associ una teoria algebrica, occorre interpretare i valori di F come insiemi-sostegno di una struttura di cui è portatrice la categoria $\mathcal{C}$. In tal modo, mentre di norma si assumono le operazioni per definire su esse i morfismi, in questo caso si adotta il procedimento

[38] F^n è il funtore che associa ad ogni oggetto X della categoria $\mathcal{C}$ il prodotto n-esimo $F(X) \times \ldots \times F(X)$ delle immagini di X attraverso il funtore F.

inverso, cercando le operazioni compatibili con i morfismi della categoria $\mathcal{C}$.

Ciò significa che, per ogni freccia $f : X \to Y$ di $\mathcal{C}$, ad un'operazione n-aria $\nu_X : F^n(X) \to F(X)$ dovrà corrispondere un'operazione n-aria $\nu_Y : F^n(Y) \to F(Y)$, in modo che, riportando f al livello degli insiemi sostegno, essa risulti essere un omomorfismo, vale a dire renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
F^n(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "F^n(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
F^n(Y) \arrow[r, "\nu_Y"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Ciò equivale a chiedere che ν_X e ν_Y siano componenti di una trasformazione naturale ν definita tra i funtori F^n e F.

Si riesce cosí a delimitare una situazione interpretabile in termini di teoria, assumendo come operazioni di quest'ultima tutte e sole le trasformazioni naturali $\nu : F^n \to F$. Esse, per ipotesi, formano un insieme (una teoria algebrica è infatti una categoria piccola), e ciò spiega la restrizione imposta ai funtori $F : \mathcal{C} \to \mathbf{INS}$ nella definizione della categoria $\mathcal{F}_*(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS})$.

La corrispondenza determina un funtore (' struttura ')

$$Str : \mathcal{F}_*(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS}) \to \mathcal{T}^{op}$$

che risulta aggiunto sinistro del funtore ' semantica '

$$Sem : \mathcal{T}^{op} \to \mathcal{F}_*(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS})$$

In particolare, se $\mathcal{C}$ è una categoria algebrica e $F : \mathcal{C} \to \mathbf{INS}$ è il suo funtore ' supporto ', allora $Str(F)$ è indistinguibile dalla teoria da cui proviene, ossia $Str \cdot Sem \simeq 1_{\mathcal{T}^{op}}$: a teorie isomorfe corrispondono categorie algebriche isomorfe e viceversa. L'interrogativo sulla possibilità di caratterizzare le proprietà di struttura mediante i morfismi della categoria associata trova cosí una risposta precisa; dalla categoria, infatti, è ricostruibile in modo univoco una teoria con l'unico concorso di un funtore ' supporto ': cosí la categoria dei gruppi e degli isomorfismi gruppali rinvia canonicamente alla teoria $\mathbf{G}$, descrizione invariante della struttura, senza la necessità di esplicitare l'architettura interna dei suoi oggetti.

Per altro, l'elezione della categoria $\mathcal{F}_*(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS})$ a dominio di definizione del funtore ' struttura ' consente di desumere una teoria algebrica anche da situazioni che la riflettono solo parzialmente, nel senso che la ' semantica ' della teoria non coincide con la categoria di partenza, ma le è associata ' universalmente '. In tal modo il funtore $\mathcal{P} : \mathbf{INS}^{op} \to \mathbf{INS}$, che associa a un insieme il suo insieme delle parti e ad un'applicazione $f : X \to Y$ l'applicazione $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, ammette come ' struttura ' corrispondente la teoria $\mathbf{B}$ delle algebre di Boole. Sia $\mathbf{B}$-ALG la categoria dei suoi modelli; allora l'unità dell'aggiunzione $Str \dashv Sem$ determina un morfismo canonico

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{INS}^{op} \arrow[rr, "\eta_{\mathbf{INS}^{op}}"] \arrow[dr, "\mathcal{P}"'] & & \mathbf{B}\text{-ALG} \arrow[dl, "S_{\mathbf{B}} = Sem(Str(\mathcal{P}))"] \\
& \mathbf{INS} &
\end{tikzcd}$$

che assegna, in corrispondenza d'ogni insieme, l'algebra di Boole delle sue parti e rappresenta, per cosí dire, la ' chiusura algebrica ' del funtore $\mathcal{P}$.

Una categoria $\mathcal{C}$, su cui sia definito un funtore F a valore negli insiemi, è dunque una categoria algebrica se e soltanto se $Sem \cdot Str(F) \simeq \simeq (F)$ (cioè se il morfismo canonico $\eta_{\mathcal{C}}$ definisce un isomorfismo in $\mathcal{F}_*$ $(\mathbf{CAT}, \mathbf{INS})$).

È tuttavia possibile formulare una condizione equivalente riferendosi alle sole proprietà strutturali di queste categorie; Lawvere ne fornisce in effetti una caratterizzazione intrinseca: una categoria che soddisfi quelle condizioni risulta allora equivalente alla categoria dei modelli di un'opportuna teoria algebrica ' presentabile ' equazionalmente.

Infine, passando dalla struttura interna delle categorie algebriche alla loro organizzazione globale, Lawvere dimostra l'esistenza di un aggiunto per ogni funtore della forma $\Phi : \mathbf{T}\text{-ALG} \to \mathbf{T}\text{-ALG}$, proveniente da un funtore $\phi : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}$ che preservi i prodotti senza essere necessariamente un morfismo della categoria $\mathcal{T}$. S'interpretano in tal modo costruzioni matematiche rilevanti (quali sono le algebre libere, le algebre tensoriali, l'abelianizzazione dei gruppi ecc.), ricondotte ad un'unica configurazione teorica che ne motiva la situazione comune: il particolare trova cosí spiegazione nell'universale, convalidando la prospettiva di generalità lungo cui si dispiega la semantica funtoriale.

4. - Strutture algebriche nelle categorie.

La tesi di Bénabou del 1966 [39] apporta a questo orientamento teorico ulteriori elementi di chiarificazione. È un semplice lavoro preparatorio quello che Bénabou si propone, è una paziente, metodica operazione esegetica quella a cui si dedica, ponendo a raffronto differenti chiavi di lettura del concetto di struttura algebrica e la sua riformulazione categoriale che misura il grado d'approfondimento della nozione che quelle attuano e da cui, retrospettivamente, appare in certo senso ' sollecitata '.

Gli interlocutori principali a cui Bénabou si rivolge si chiamano Lawvere, Higgins e Cohn. Lawvere in quanto ideatore della semantica funtoriale di cui questo lavoro si configura come la prosecuzione naturale; Higgins in quanto autore di significative generalizzazioni che, pur mantenendosi nell'ottica dell'algebra universale, ne ampliano il campo d'intervento [40]; Cohn [41] in quanto autorevole rappresentante del ' nuovo

[39] J. Bénabou, *Structures algébriques dans les catégories*, Parigi, 1966 (pubblicato successivamente nei « Cahiers de topologie et de géométrie differentielle », X-1, 1968).

[40] P. J. Higgins, *Algebras with a scheme of operators* (« Mathematische Nachrichten », XXVII, 1963-64).

Higgins intende far rientrare all'interno dell'impianto generale dell'algebra universale quelle strutture che esulano dal suo indirizzo interpretativo, in modo da far loro beneficiare dei risultati della teoria e di ampliare lo spettro tematico di quest'ultima. La soluzione prospettata da Higgins, mutuata dall'algebra multilineare, consiste nel concepire una struttura algebrica (nell'accezione generale) come una struttura g r a d u a t a. Ciò significa che su una famiglia d'insiemi $\{A_i\}$ è definita una struttura attraverso una famiglia Ω di ' operatori '. Ciascun operatore ω della famiglia determina una famiglia di leggi di composizione $\kappa\colon A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \rightarrow A_j$ (le operazioni dell'algebra che gli viene associata), i cui dominî e codominî vengono assegnati anticipatamente per mezzo di un sistema di indici associato all'operatore ω. La definizione che inquadra queste strutture come algebre parziali (ovverosia munite d'operazioni parzialmente definite) non si mostra feconda di risultati. Sicché se Higgins l'adotta (nella forma piú generale di algebra relazionale) è solo per assumerla come supporto d'una costruzione ulteriore: ogni operatore agisce sull'insieme $\mathfrak{I}$ degli indici come una relazione o un'operazione parzialmente definita e la famiglia Ω vi determina pertanto una struttura algebrica parziale; poiché un'operazione n-aria ω su $\mathfrak{I}$ è identificabile con un'applicazione definita su un sottoinsieme di $\mathfrak{I}^n$ a valori in $\mathfrak{I}$, una struttura indotta dalla famiglia Ω su $\mathfrak{I}$ (o Ω-struttura) è dunque rappresentabile sotto forma di un'applicazione $\sigma\colon \Omega \rightarrow \mathbf{R}(\mathfrak{I})$, dove $\mathbf{R}(\mathfrak{I})$ è l'insieme delle relazioni definibili su $\mathfrak{I}$. Ad ogni operatore $\omega \in \Omega$ è associata un'arietà, e σ invia un operatore n-ario di Ω su una relazione a $(n + 1)$ termini su $\mathfrak{I}$.

Data allora una famiglia $\{A_i\}$ d'insiemi indiciata da $\mathfrak{I}$, una Ω-struttura σ vi corso ' della stessa disciplina, di cui riordina i risultati in una prospettiva sistematica in cui sono fatti confluire diversi apporti teorici [42] e l'approccio di Higgins è riguadagnato in un contesto piú generale e maneggevole [43].

può essere interpretata come schema d'operatori nel modo seguente: ad ogni $(i_1, \ldots, i_n, j) \in \sigma(\omega)$ viene associata una legge di composizione κ: $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \rightarrow A_j$. La famiglia $\{A_i\}$ munita di questa struttura viene chiamata σ-algebra. Ad ogni operatore n-ario ω la Ω-struttura soggiacente alla σ-algebra cosí definita fa corrispondere un sistema di indici che stabiliscono il dominio e il codominio delle leggi di composizione associate all'operatore.

Sulle strutture algebriche definite tramite schemi d'operatori (schemi, giacché non agiscono direttamente come operatori sugli insiemi A_i) sono allora formulabili le nozioni di isomorfismo, omomorfismo, struttura-prodotto ecc. In questo formalismo rientrano le algebre con operazioni ovunque definite, le strutture algebriche ' graduate ' (gruppi abeliani graduati, anelli graduati) e le categorie.

La struttura di categoria può essere infatti interpretata un'algebra graduata assumendo come insieme degli indici $\mathfrak{I}$ il prodotto cartesiano dell'insieme degli oggetti della categoria, come famiglia di operatori l'insieme $\{1, \cdot\}$ dove l'immagine di 1 attraverso σ è la diagonale di $\mathfrak{I}$ (con ciò resta definita una relazione a un termine, vale a dire un sottoinsieme di $\mathfrak{I}$), mentre $\cdot$ definisce un'operazione binaria sul sottoinsieme di $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ costituito dalle coppie $((a, b), (b, c))$ coincidenti su una componente, in modo che $(a, b) \cdot (b, c) = (a, c)$. Lo schema σ determina una struttura sulla famiglia d'insiemi $\{M_i\} = \{Morf(a, b)\}$ indiciata da $\mathfrak{I}$ associando ad ogni elemento (a, a) della diagonale un unico elemento di $Morf(a, a)$, l'identità id_a, e facendo corrispondere all'operazione $\cdot$ la legge di composizione $Morf(a, b) \times Morf(b, c) \rightarrow Morf(a, c)$. Infine, gli assiomi che caratterizzano $\{M_i\}$ come categoria possono essere formulati sotto forma di σ-identità (vale a dire di equazioni costruite a partire dai simboli della Ω-struttura soggiacente).

[41] P. M. Cohn, *Universal Algebra*, New York, Harper and Row, 1965 (trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1971).

[42] Dalla teoria dei modelli a quella delle categorie, entrambe adottate ' pragmaticamente ' come strumenti interpretativi soltanto in relazione a particolari tematiche (fin dove è possibile, Cohn preferisce infatti dimostrare teoremi ' per via diretta ', ricorrendo al solo arsenale teorico dell'algebra universale classica). In particolare il linguaggio categoriale è impiegato nel caso della trattazione delle algebre libere, dove riesce specialmente comodo esprimersi in termini di applicazioni universali.

[43] Nell'impostazione di Cohn una struttura algebrica è data da una collezione d'operazioni ' finitarie ' definite su un insieme. Il confronto tra algebre avvenendo sulla base dei rispettivi sistemi d'operazioni, appare naturale inquadrarle secondo le rispettive arietà. Ogni famiglia di operazioni Ω viene allora concepita come unione disgiunta di sottofamiglie Ω_n contenenti i simboli d'operazione raggruppati a seconda dell'arietà. Una Ω-struttura diviene cosí una collezione di applicazioni σ_n che ad ogni simbolo d'operazione $\omega \in \Omega_n$ associano un'operazione n-aria $f: A^n \rightarrow A$.

Le algebre ' graduate ' di Higgins ricompaiono sotto forma di ' cloni d'operazioni ' (che ne rappresentano tuttavia un caso particolare): un clone definito su un insieme A è un insieme di operazioni $\mathfrak{K}$ chiuso rispetto alle composizioni e alle proiezioni. Un clone viene generato da una struttura di Ω-algebra definita su un

Lo scritto di Bénabou esordisce enunciando la definizione ' funtoriale ' di struttura algebrica, che il prosieguo del testo s'incaricherà man mano di ' giustificare '. Se $\mathfrak{I}$ è un insieme qualsiasi (i cui elementi verrano chiamati ' indici ') e $\mathfrak{M}$ è il monoide libero generato da $\mathfrak{I}$ [44], un ' tipo d'algebra su $\mathfrak{I}$ termini ' (nella terminologia di Lawvere: ' una teoria algebrica a $\mathfrak{I}$-sorte ') è una categoria **T** di cui $\mathfrak{M}$ è l'insieme degli oggetti e tra le cui frecce compaiono le proiezioni canoniche $\pi_{i,k} : i_1 \ldots$ $\ldots i_n \rightarrow i_k$ $(k = 1, 2, \ldots, ; i_k \in \mathfrak{I})$ associate ad ogni 'multi-indice' $\underline{i} = i_1 \ldots$ $\ldots i_n \in \mathfrak{M}$ [45]. Piú in generale, ogni freccia di **T** che associ un indice a un multi-indice verrà detta operazione del tipo.

Un morfismo tra $\mathfrak{I}$-tipi, **T**, **T**$'$ è un funtore μ : **T** $\rightarrow$ **T**$'$ che, ristretto all'insieme degli oggetti coincide con la funzione identica definita su $\mathfrak{M}$. La classe degli $\mathfrak{I}$-tipi e dei relativi morfismi forma una categoria **TIP**($\mathfrak{I}$).

Un' ' algebra ' di tipo **T** (o **T**-algebra) è un funtore compatibile con le proiezioni $\mathfrak{A}$: **T** $\rightarrow \mathfrak{C}$, dove $\mathfrak{C}$ è un'arbitraria categoria che ammette prodotti finiti. Ciò significa che $\mathfrak{A}$ ' classifica ' attraverso l'insieme degli indici $\mathfrak{I}$ una famiglia di oggetti $A_i = \mathfrak{A}(i)$ di $\mathfrak{C}$, ed associa ad ogni multi-indice $\underline{i} = i_1 \ldots i_n$ di $\mathfrak{M}$ l'oggetto $\mathfrak{A}(\underline{i}) = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$, interpretando le proiezioni canoniche di **T** come proiezioni del prodotto nella categoria $\mathfrak{C}$. Se $\omega : i_1 \ldots i_n \rightarrow j$ è un'operazione del tipo **T**, essa diviene nella T-algebra $\mathfrak{A}$ una legge di composizione (esterna) $\omega_{\mathfrak{A}} : A_{i_1} \times \ldots$ $\ldots \times A_{i_n} \rightarrow A_j$.

La classe delle **T**-algebre definite in una categoria $\mathfrak{C}$ forma una

insieme A come l'insieme delle operazioni derivate ottenibili per composizione dalle operazioni originariamente associate in A ai simboli di Ω e dalle proiezioni canoniche definite sui prodotti. Nella terminologia di Higgins un clone è una struttura algebrica assegnata sulla famiglia $\{\mathcal{K}_n\}$ sulla quale gli operatori di composizione e proiezione definiscono operazioni $(n + 1)$-arie (al variare di n) e 0-arie rispettivamente.

Considerando le operazioni come particolari relazioni (un'operazione n-aria essendo concepibile sotto forma di relazione su $n + 1$ termini univoca rispetto alla $(n + 1)$-esima coordinata), le strutture algebriche possono essere considerate esempî di strutture relazionali nella cui definizione rientrano strutture come i campi e i gruppi ordinati. A questo ampliamento tematico corrisponde, nel testo di Cohn, l'adozione del vocabolario e delle tecniche della teoria dei modelli.

[44] Cioè l'insieme delle successioni finite di elementi di $\mathfrak{I}$ composti per semplice ' giustapposizione ' (ponendo $(i_1 \ldots i_n)$ $(j_1 \ldots j_m)$ $=$ $(i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m)$), dove l'indice vuoto funge da elemento neutro.

[45] Munito di queste frecce il multi-indice diviene il prodotto (nella categoria **T**) degli oggetti $i_1, \ldots, i_n$.

categoria $\mathbf{ALG}(\mathbf{T},\mathcal{C})$ i cui morfismi sono costituiti dalle trasformazioni naturali tra i funtori definenti le $\mathbf{T}$-algebre. Il funtore d'omissione $\mathcal{O}_{\text{alg}} : \mathbf{ALG}(\mathbf{T},\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{\mathfrak{I}}$ [46] associa ad una $\mathbf{T}$-algebra $\mathcal{A}$ la famiglia dei suoi oggetti $\{A_i\}$. Come nelle ordinarie strutture algebriche (definite sugli insiemi), una $\mathbf{T}$-algebra risulta determinata da una famiglia di oggetti soggiacenti e dalle leggi di composizione definite su essi: un morfismo tra $\mathbf{T}$-algebre presuppone in effetti un morfismo tra le rispettive famiglie soggiacenti, ripristinando cosí la consueta definizione di omomorfismo (morfismo tra i supporti delle strutture, compatibile con le operazioni). Si ritrova anche la nozione di trasporto di struttura: se $\mathcal{A} : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{C}$ è una $\mathbf{T}$-algebra e $\{A_i\}$ la sua famiglia soggiacente, un isomorfismo sussistente tra $\{A_i\}$ ed un'altra famiglia di oggetti $\{A'_i\}$ è prolungabile su $\mathcal{M}$ (vale a dire sui prodotti), definendo in tal modo una $\mathbf{T}$-algebra $\mathcal{A}' : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{C}$ isomorfa a $\mathcal{A}$ ed ottenuta da questa per ' trasporto di struttura '. Il prolungamento dell'isomorfismo definito tra le famiglie soggiacenti è unico a meno d'isomorfismi [47].

Tale è l'impianto generale congegnato da Bénabou, che estende quello di Lawvere ad un livello di generalità più elevato, contemplando tipi costruiti su $\mathfrak{I}$ termini e modelli definibili su arbitrarie categorie munite di prodotti [48]. L'inclusione dell'uno nell'altro è immediata: se $\mathfrak{I} = \{1\}$ allora $\mathcal{M} \simeq \mathbf{N}$ e gli 1-tipi coincidono con le teorie algebriche di Lawvere; la categoria $\mathbf{TIP}(1)$ è inoltre identificabile con la categoria $\mathfrak{I}$ delle teorie algebriche e se $\mathbf{T} \in \mathbf{TIP}(1)$, $\mathbf{ALG}(\mathbf{T},\mathbf{INS})$ è una categoria algebrica nel senso di Lawvere.

Ricondotta la nozione di struttura algebrica a situazioni funtoriali relative ai tipi, Bénabou accantona momentaneamente il formalismo che ha appena allestito per dedicarsi all'esame delle interpretazioni che ne sono state date al di fuori del contesto categoriale. Non ci si dovrà attendere, ben inteso, un resoconto fedele (cioè caotico) dei differenti approcci a questo tema; si tratta invece di un inventario ragionato che riordina in una prospettiva unitaria la ' nomenclatura ' dell'algebra universale, fornendone la migliore approssimazione al piano di generalità sul quale agisce la nozione di tipo algebrico.

[46] $\mathcal{C}^{\mathfrak{I}}$ è la categoria delle famiglie di oggetti di $\mathcal{C}$ indiciate da $\mathfrak{I}$.

[47] Esso dipende dagli oggetti di $\mathcal{C}$ che vengono associati ai multi-indici come prodotti degli elementi della famiglia $\{A'_i\}$.

[48] La stessa restrizione ai prodotti finiti è inessenziale e viene lasciata cadere nel proseguimento della trattazione.

Si definisce allora ' schema d'operazioni ' su $\mathfrak{J}$ termini una coppia $\gamma = \{\Omega, \rho\}$ costituita da un insieme Ω, l'insieme delle operazioni dello schema, e da un'applicazione $\rho : \Omega \to \mathfrak{M} \times \mathfrak{J}$ che associa ad ogni operazione $\omega \in \Omega$ il suo ' rango ' $\rho(\omega) = (i_1 \dots i_n, j)$, sostituto delle ' arietà ' per le strutture definite su piú termini [49]. Un morfismo tra schemi è dato da un'applicazione tra i rispettivi insiemi di operazioni che preserva i ranghi. Gli $\mathfrak{J}$-schemi e i relativi morfismi formano una categoria $\mathbf{OP}(\mathfrak{J})$.

Passando alle interpretazioni di uno schema [50], si perviene alla nozione di ' prealgebra ' [51]. Una prealgebra di schema γ è una coppia $\mathbf{P} = (\{X_i\}, \{h_\omega\})$ costituita da una famiglia di oggetti di una categoria con prodotti finiti $\mathcal{C}$ indiciata dall'insieme $\mathfrak{J}$ e da una famiglia di frecce della stessa categoria indiciate dall'insieme delle operazioni dello schema, in modo che ad un'operazione ω di rango $(i_i \dots i_1, j)$ corrisponda una freccia (' legge di composizione ') $h_\omega : X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n} \to X_j$ che rispetti il sistema degli indici. Un morfismo tra due prealgebre di schema γ a valori nella stessa categoria è dato da una famiglia di frecce definite sule rispettive famiglie di sostegno, compatibili con le leggi di composizione.

La nozione di prealgebra può essere caratterizzata altrimenti: se $\mathcal{C}$ è una categoria che ammette prodotti finiti, e se $\{X_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ è una famiglia di suoi oggetti, per ogni coppia $(\underline{i}, j) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{J}$, dove $\underline{i} = i_1 \dots i_n$, si pone $\Omega_{\underline{i}, j} = Morf_{\mathcal{C}}\,(X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n}, X_j)$. La riunione degli insiemi $\Omega_{\underline{i}, j}$ definisce uno schema $\gamma_{\{X_i\}}$, lo schema delle leggi di composizione della famiglia $\{X_i\}$. Se γ è un qualsiasi altro schema su $\mathfrak{J}$ termini, una prealgebra di schema γ a valori nella famiglia $\{X_i\}$ si riduce a un morfismo tra schemi $\varphi : \gamma \to \gamma_{\{X_i\}}$. Quest'interpretazione, che si rivela particolarmente utile e viene adottata anche in corrispondenza di altre nozioni, descrive dunque lo schema ' massimale ' associabile a una famiglia di oggetti di una categoria; negli insiemi esso contemplerebbe tutte le possibili leggi di composizione definibili sugli oggetti della famiglia. D'altro canto $\gamma_{\{X_i\}}$ fa da spartiacque fra schemi e strutture: formalmente

[49] Se $\rho = (i^n, i)$ l'operazione è chiamata ' interna ' (ed il rango torna a coincidere con le arietà); interpretata negli insiemi essa determina una operazione n-aria.

[50] Per snellire la notazione sottintenderemo (salvo menzione contraria) di muoverci nell'assunzione di un unico sistema di indici $\mathfrak{J}$. Le nozioni di schema, specie, ecc. vanno dunque intese relativamente ad esso (come $\mathfrak{J}$-schema, $\mathfrak{J}$-specie, ecc.).

[51] Il termine ' algebra ' con cui abitualmente essa è designata, viene riservato da Bénabou a strutture provenienti da situazioni sintattiche piú articolate, come quelle delle specie e dei compositori (cfr. sotto).

è uno schema d'operazioni, giacché non è posta alcuna condizione sugli elementi dell'insieme Ω, ma in sostanza è una prealgebra (esprimibile nel formalismo attraverso il morfismo identico $\gamma\{x_i\}\rightarrow\gamma\{x_i\}$), le sue operazioni essendo di fatto leggi di composizione nella categoria considerata. La costruzione è così in grado di gettare un ponte fra sintassi e semantica, riportando le prealgebre — come s'è visto — al livello degli schemi [52].

D'altra parte, la nozione di $\mathfrak{J}$-schema di operazioni [53] (che traduce nel contesto di generalità richiesto dall'indagine ciò che solitamente è chiamato ' tipo di similarità ') delimita la situazione piú semplice in cui vengono interpretate le strutture algebriche, rappresentando la loro caratterizzazione ' minimale '. Le nozioni che vengono introdotte nel proseguimento della trattazione si configurano come suoi progressivi completamenti che condurranno la nozione di prealgebra a quella di algebra.

Tralasciando gli stadi intermedi che descrivono i meccanismi attraverso i quali uno schema si dota di proiezioni e delle operazioni composte, giungiamo alla nozione di specie, che — come nell'impostazione di Lawvere — è formulata sul piano puramente sintattico, che ne esibisce la forma astratta, indipendente dalle possibili realizzazioni nelle categorie. Grazie alla saturazione ' combinatoria ' di uno schema γ (attraverso le proiezioni e le operazioni composte) è definibile l'insieme $\mathcal{Q}$ delle coppie (ω,ω') di operazioni (derivate) di rango uguale; una specie (equazionale) definita su γ è allora esprimibile attraverso un sottoinsieme $\mathcal{E}$ di $\mathcal{Q}$, i cui elementi rappresentano gli assiomi della specie. Un morfismo tra due specie è un morfismo tra gli schemi soggiacenti che, esteso alle rispettive ' saturazioni ', associa gli assiomi dell'una a quelli dell'altra. Si ottiene in tal modo una categoria $\mathbf{SPEC}(\mathfrak{J})$.

Il corrispettivo semantico delle specie fornisce la nozione di ' algebra ': un'algebra di specie $\sigma = (\gamma,\mathcal{E})$ è una prealgebra $\mathbf{P} = (\{X_i\},\{h_\omega\})$ di schema γ che soddisfa gli assiomi della specie [54]. Le algebra di specie σ

[52] Le stesse algebre definite sui tipi sono suscettibili di un'analoga interpretazione. Se $\{X_i\}$ è una famiglia di oggetti di una categoria $\mathcal{C}$ che ammette i prodotti finiti, le frecce della categoria definite sui prodotti degli oggetti X_i e la loro composizione determinano un $\mathfrak{J}$-tipo $\mathbf{T}_{\{Xi\}}$. Una $\mathbf{T}$-algebra $\mathcal{A}$ definita sulla famiglia di oggetti $\{X_i\}$ è allora interpretabile come morfismi tra $\mathfrak{J}$-tipi $\mathcal{A}$: $\mathbf{T}\rightarrow\mathbf{T}_{\{Xi\}}$.

[53] Se ci si restringe al caso degli insiemi (il solo esaminato da Higgins), gli schemi di operatori sono riducibili agli schemi di operazioni nel senso di Bénabou, la sola differenza consistendo nel fatto che — nel formalismo di Higgins — uno stesso operatore può indurre in un modello piú leggi di composizione.

[54] Tutto ciò è esprimibile in termini puramente categoriali: come nel caso delle

definite in una categoria $\mathcal{C}$ costituiscono a loro volta una categoria **ALG**$(\sigma, \mathcal{C})$ che ammette come frecce i morfismi tra le prealgebre soggiacenti.

La ricognizione di Bénabou del vocabolario teorico dell'algebra universale si conclude con la nozione di ' compositore ' che riformula, a livello degli schemi, quella di ' clone di operazioni ', dovuta a Cohn.

L'insieme Ω delle operazioni di uno schema γ può esser rappresentato sotto forma di unione disgiunta di insiemi $\Omega_{i,j}$ che ne raggruppano le operazioni a seconda del loro rango. Una ' moltiplicazione ' su γ è data allora da una famiglia di applicazioni

$$\kappa = \{\kappa_{\underline{i},\underline{i}',j}\}_{\underline{i},\underline{i}',j} \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{I}$$

dove, posto $\underline{i}' = i_1 \ldots i_n$,

$$\kappa_{\underline{i},\underline{i}',j} : \Omega_{\underline{i},j} \times \Omega_{\underline{i},i} \times \ldots \times \Omega_{\underline{i},i} \rightarrow \Omega_{\underline{i},i}$$

associa ad una $(n+1)$-pla $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ di operazioni dello schema γ l'operazione $\omega_0(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \gamma$. Una moltiplicazione associativa [55] e compatibile con le proiezioni [56] è chiamata ' compositore ' su γ. Le nozioni

prealgebre, in cui la realizzazione di uno schema d'operazioni γ in una famiglia d'oggetti $\{X_i\}$ d'una categoria era ricondotto ad un morfismo tra schemi $\gamma \rightarrow \gamma_{\{Xi\}}$, anche nel caso delle algebre si tratterà di approntare un'analoga interpretazione, associando a $\{X_i\}$ una specie di struttura di schema $\gamma_{\{Xi\}}$ che fornisca i ' valori ' a tutte le algebre definibili sulla stessa famiglia di oggetti.

Formalmente la costruzione si configura nei seguenti termini: l'applicazione identica $\mathbf{I}$: $\gamma_{\{Xi\}} \rightarrow \gamma_{\{Xi\}}$, in quanto morfismo tra schemi a valori nello schema canonicamente associato alla famiglia $\{X_i\}$, definisce una pre-algebra. Sia $\gamma^*_{\{Xi\}}$ lo schema ottenuto da $\gamma_{\{Xi\}}$ attraverso l'introduzione delle proiezioni e la ' saturazione ' operatoria per composizione; la pre-algebra $\mathbf{I}$ si prolunga allora in una pre-algebra $\mathbf{I}^*$: $\gamma^*_{\{Xi\}} \rightarrow \gamma^*_{\{Xi\}}$ di schema $\gamma^*_{\{Xi\}}$. Sia $\mathbf{E}(\gamma^*_{\{Xi\}})$ l'insieme delle coppie di operazioni di rango uguale appartenenti a $\gamma^*_{\{Xi\}}$, che si può pensare come l'insieme delle equazioni definibili sullo schema $\gamma_{\{Xi\}}$. Se π_1, π_2: $\mathbf{E}(\gamma^*_{\{Xi\}}) \rightarrow \gamma^*_{\{Xi\}}$ sono le proiezioni canoniche, si definiscono i morfismi composti $\pi_1 \cdot \mathbf{I}^*$, $\pi_2 \cdot \mathbf{I}^*$: $\mathbf{E}(\gamma^*_{\{Xi\}}) \rightarrow \gamma^*_{\{Xi\}} \rightarrow \gamma_{\{Xi\}}$; l'ugualizzatore della coppia di morfismi $(\pi_1 \cdot \mathbf{I}^*, \pi_2 \cdot \mathbf{I}^*)$ determina l'insieme $\mathcal{E}_{\{Xi\}}$ delle equazioni vere in $\{X_i\}$, che costituirà il sistema di assiomi della specie $\sigma_{\{Xi\}} = (\gamma_{\{Xi\}}, \mathcal{E}_{\{Xi\}})$. Un'algebra di specie $\sigma = (\gamma, \mathcal{E})$ sulla famiglia $\{X_i\}$ diviene allora un morfismo tra specie $\mu : \sigma \rightarrow \sigma_{\{Xi\}}$ ossia un morfismo tra gli schemi soggiacenti che associa agli assiomi di σ quelli di $\sigma_{\{Xi\}}$ (dunque una prealgebra di schema γ compatibile con gli assiomi).

[55] Una moltiplicazione κ è associativa se, ogni qual volta $\overline{\omega}_0 = \omega_0(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ e $\overline{\omega}_k = \omega_k(\omega'_1 \ldots, \omega'_p)$ per $1 \leqq k \leqq n$, si abbia $\overline{\omega}_0(\omega'_1, \ldots, \omega'_p) = \omega_0(\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_n)$.

[56] Una moltiplicazione κ è compatibile con le proiezioni se, per ogni proiezione $\pi_{\underline{i},k}$, si abbia $\kappa(\pi_{\underline{i},k}, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_k$ e $\kappa(\omega, \pi_{\underline{i},1}, \ldots, \pi_{\underline{i},n}) = \omega$, ogni

di moltiplicazione e di compositore rappresentano dunque dei ' sistemi di chiusura ' rispetto alla composizione delle operazioni e delle proiezioni negli schemi.

Un morfismo tra compositori si definisce come morfismo tra gli schemi soggiacenti compatibile con la moltiplicazione e le proiezioni. Si determina cosí una categoria **COMP**($\mathfrak{I}$). Sullo schema d'operazioni $\gamma_{\{X_i\}}$ canonicamente associato ad una famiglia $\{X_i\}$ d'oggetti di una categoria $\mathcal{C}$ è definibile un compositore $\kappa_{\{X_i\}}$, rilevandolo dalla struttura della categoria $\mathcal{C}$, ossia dalla composizione tra frecce che vi è definita[57]. Un morfismo tra compositori $\mu : \kappa \to \kappa_{\{X_i\}}$ è allora interpretabile in termini di ' algebra ' definita dal compositore κ (o κ-algebra ') nella categoria $\mathcal{C}$. Le κ-algebre a valori in $\mathcal{C}$ e i relativi morfismi costituiscono una categoria **ALG**(κ,$\mathcal{C}$).

Rivisitato cosí il sistema di nozioni che definiscono l'architettura dell'algebra universale, Bénabou passa a riesaminarle tutte alla luce di quella di tipo, distrincandone, come da pagine intonse, i mutui rapporti.

Un tipo algebrico **T**, nell'accezione di Bénabou, è una categoria a cui l'insieme degli indici $\mathfrak{I}$ fornisce la famiglia degli oggetti. In quanto tale gli è associabile canonicamente uno schema $\gamma_{\mathbf{T}}$ che coincide, a meno d'isomorfismi, con la famiglia d'insiemi $\{Morf_{\mathbf{T}}(\underline{i},j)\}_{\underline{i},j\,\in\,\mathfrak{M}\times\mathfrak{I}}$ i cui elementi costituiscono le operazioni del tipo, mentre dominio e codominio ne definiscono i rispettivi ranghi. Allo schema $\gamma_{\mathbf{T}}$ è associabile a sua volta un compositore $\kappa_{\mathbf{T}}$ che ' preleva ' dalla struttura categoriale di **T** la componibilità tra operazioni e proiezioni. Un morfismo tra $\mathfrak{I}$-tipi $\mu : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ è allora interpretabile come morfismo $\mu : \gamma_{\mathbf{T}} \to \gamma_{\mathbf{T}'}$ tra gli schemi associati, compatibile con la moltiplicazione definita dai compositori $\kappa_{\mathbf{T}}$ e $\kappa_{\mathbf{T}'}$. La corrispondenza che associa il compositore $\kappa_{\mathbf{T}}$ al tipo **T** si prolunga cosí in un funtore tra le rispettive categorie d'appartenenza **K** : **TIP**($\mathfrak{I}$) $\to$ **COMP**($\mathfrak{I}$). Viceversa, l'assunzione di un compositore κ definito da uno schema γ consente la costruzione di un tipo $\mathbf{T}_\kappa$ interpretando le operazioni dello schema come frecce di cui il rango stabi-

qual volta siano definite le espressioni che compaiono a sinistra del segno di uguale. Il sistema delle proiezioni funge cosí da elemento neutro per la moltiplicazione κ.

[57] In effetti lo schema $\gamma_{\{X_i\}}$ ha come insieme di operazioni la famiglia

$$\{Morf\ (X_{i_1} \times \ldots X_{i_n}, X_j)\}_{i_1,\ldots,i_n,\,j\,\in\,\mathfrak{M}\times\mathfrak{I}}$$

La loro composizione determina operazioni ancora apppartenenti allo schema, definendovi una moltiplicazione associativa e compatibile con le proiezioni. La nozione di ' clone di operazioni ' coincide con quella di compositore $\kappa_{\{X_i\}}$ quando la famiglia $\{X_i\}$ contiene un solo oggetto.

lisce dominio e codominio; la moltiplicazione e le proiezioni del compositore κ assicurano una struttura categoriale al tipo $\mathbf{T}_\kappa$ cosí determinato. Si ottiene anche in questo caso un funtore H : **COMP**($\mathfrak{J}$)$\rightarrow$ $\rightarrow$ **TIP**($\mathfrak{J}$). La coppia dei funtori stabilisce l'equivalenza tra la categoria degli $\mathfrak{J}$-tipi e quella degli $\mathfrak{J}$-compositori, che si riflette anche sulle rispettive realizzazioni: per ogni categoria $\mathcal{C}$ che ammette prodotti finiti, le categorie **ALG**($\mathbf{T}$,$\mathcal{C}$) e **ALG**($\kappa_\mathbf{T}$,$\mathcal{C}$) risultano infatti isomorfe[58].

Questo risultato stabilisce pertanto l'interscambiabilità delle due nozioni, sia sul piano sintattico (equivalenza tra le rispettive categorie), sia su quello semantico (isomorfismo tra le rispettive categorie dei modelli e conseguente identificabilità delle strutture algebriche che esse determinano in una categoria). La nozione di tipo algebrico esplicita così le situazioni categoriali che, già a livello sintattico, la nozione di compositore coinvolge, permettendo di far beneficiare della sua generalità l'apparato teorico che ricapitola[59].

Quanto agli schemi di operazioni, essi appaiono il momento iniziale della descrizione delle strutture: sia la nozione di specie, sia quella di compositore li presuppongono come situazione costitutiva; la stessa nozione di tipo si configura come una sorta di ' completamento ' categoriale dello schema. I modi attraverso cui le altre nozioni sussumono quella di schema ci forniscono d'altra parte la misura comune a cui rapportare le specie e i tipi.

Come oggetto sintattico una specie è data da uno schema d'operazioni e da un insieme di equazioni tra espressioni ottenute componendo le operazioni dello schema e le proiezioni. La realizzazione di una specie in una categoria interpreta le operazioni come frecce della categoria e gli assiomi come diagrammi commutativi in cui figurano tali frecce. In particolare, una famiglia di oggetti $\{X_i\}$ di una categoria $\mathcal{C}$ è portatrice di una specie ' massimale ' (inscritta nella struttura di $\mathcal{C}$), che fornisce i valori a tutte le algebre definibili su $\{X_i\}$. Ora un tipo **T**, avendo come insieme d'oggetti la stessa famiglia degli indici, è suscettibile della medesima interpretazione: esso esprime dunque una specie, i cui assiomi sono costituiti dalle identità di composizione della forma $\omega_o(\omega_1,\dots,\omega_n) =$

[58] Al pari delle categorie **ALG** (κ, $\mathcal{C}$) e **ALG** ($\mathbf{T}_\kappa$, $\mathcal{C}$); in effetti, per ogni $\mathfrak{J}$-compositore κ, risulta $K(H(\kappa)) = \kappa$.

[59] Ciò che qui s'esprime in termini d'equivalenza costituisce in realtà il risultato di una generalizzazione anteriore; le nozioni di schema e di compositore formulate da Bénabou sono in effetti generalizzazioni del vocabolario dell'algebra universale.

$= \omega'$ sussistenti tra le operazioni del tipo. Poiché un morfismo tra tipi preserva gli assiomi delle specie associate (definendo un morfismo tra esse), la corrispondenza determina un funtore $\Sigma : \mathbf{TIP}(\mathfrak{J}) \to \mathbf{SPEC}(\mathfrak{J})$ che ammette un aggiunto sinistro $T : \mathbf{SPEC}(\mathfrak{J}) \to \mathbf{TIP}(\mathfrak{J})$. In particolare, $T(\Sigma(\mathbf{T}))$ risulta isomorfo a $\mathbf{T}$.

Trasferiti sul piano semantico, i due funtori Σ e T determinano un isomorfismo tra le categorie dei modelli dei tipi e delle specie da essi collegate, ovverosia $\mathbf{ALG}(\mathbf{T},\mathcal{C}) \simeq \mathbf{ALG}(\Sigma(\mathbf{T}),\mathcal{C})$ e $\mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}) \simeq \mathbf{ALG}(T(\sigma),\mathcal{C})$ per ogni categoria con prodotti finiti $\mathcal{C}$. Si ottiene in tal modo un vocabolario che consente di connettere le due nozioni: da una parte la coppia di aggiunti ci consente di ricostruirle l'una dall'altra in quanto entità sintattiche; dall'altra gli isomorfismi categoriali le rilevano coestensive. I tipi si dimostrano cosí sufficienti per classificare le specie.

Nondimeno, nella formulazione datane da Bénabou, la nozione di specie costituisce una generalizzazione dell'accezione ordinaria, circoscritta agli insiemi. Gli ambienti che forniscono il supporto alle strutture sono ora arbitrarie categorie con prodotti finiti e questa circostanza si ripercuote sulle modalità del confronto tra specie. La corrispondenza con i tipi va pertanto commisurata a questa possibilità di variazione ad al significato che assume in questo contesto la nozione di equivalenza tra specie.

Se $\mathcal{A} : \sigma \to \sigma_{\{X_i\}}$ è un'algebra di specie σ definita su una famiglia d'oggetti di una categoria $\mathcal{C}$, un funtore $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ che preserva i prodotti finiti associa ad $\mathcal{A}$ un'algebra $\mathcal{A}'$ di schema σ in $\mathcal{C}'$ che ha come sostegno la famiglia di oggetti $\{\phi(X_i)\}$ e le cui leggi di composizione, provenienti dall'algebra $\mathcal{A}$, rispettano lo schema d'operazioni soggiacente alla specie. La corrispondenza descrive in tal modo un funtore $\phi_\sigma : \mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}) \to \mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}')$, compatibile con i relativi funtori di omissione. D'altra parte la confrontabilità sintattica tra le specie si riflette sulle loro interpretazioni in una categoria, prolungando un morfismo $\mu : \sigma' \to \sigma$ di $\mathbf{SPEC}(\mathfrak{J})$ in un'algebra $\mathcal{A} : \sigma \to \sigma_{\{X_i\}}$. Il morfismo composto $\mu \cdot \mathcal{A} : \sigma' \to \sigma \to \sigma_{\{X_i\}}$ risulta infatti un'algebra di specie σ'. Si ottiene in tal modo un funtore $\mu_{\mathcal{C}} : \mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}) \to \mathbf{ALG}(\sigma',\mathcal{C})$, che rispetta i relativi funtori d'omissione.

La considerazione incrociata delle due situazioni permette allora di render conto della variabilità della destinazione interpretativa delle specie, facendo intervenire simultaneamente l'effetto semantico di un morfismo tra specie e di un funtore tra le categorie di sostegno. Si verifica infatti la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "\phi_\sigma"'] & \mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}') \arrow[d, "\phi_{\sigma'}"] \\
\mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}' \arrow[r, "\mu_{\mathcal{C}'}"] & \mathbf{ALG}(\sigma',\mathcal{C}')
\end{tikzcd}$$

Si può allora ritenere il risultato di questa costruzione e definire come ' morfismo semantico ' $\tilde{\mu} : \sigma \to \sigma'$ tra due $\mathfrak{J}$-specie l'assegnazione, in corrispondenza di ogni categoria $\mathcal{C}$ con prodotti finiti, di un funtore $\mu_{\mathcal{C}} : \mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}) \to \mathbf{ALG}(\sigma',\mathcal{C})$ (funtoriale in $\mathcal{C}$ e compatibile con i rispettivi funtori di sostegno)[60].

Due specie σ e σ' si dicono allora ' equivalenti ' se esiste un morfismo semantico $\tilde{\mu} : \sigma \to \sigma'$ che definisce, in presenza d'ogni categoria $\mathcal{C}$ con prodotti finiti, un isomorfismo $\mathbf{ALG}(\sigma,\mathcal{C}) \simeq \mathbf{ALG}(\sigma',\mathcal{C})$ funtoriale in $\mathcal{C}$ e compatibile con i funtori di sostegno. La nozione d'equivalenza cosí formulata accomuna dunque le specie sulla base dell'indistinguibilità delle loro realizzazioni, riportando la reciprocità dei rispettivi sistemi d'assiomi a quella delle loro ' conseguenze ' nelle categorie.

Le $\mathfrak{J}$-specie ed i morfismi semantici formano una categoria $\mathbf{S\widetilde{PE}C}(\mathfrak{J})$, in cui la componibilità tra frecce è data da quella dei funtori algebrici che definiscono i morfismi semantici[61]. Un'equivalenza semantica tra specie è dunque un isomorfismo nella categoria $\mathbf{S\widetilde{PE}C}(\mathfrak{J})$.

La medesima situazione è riformulabile in modo assai piú ' maneggevole ' se riportata al punto di vista dei tipi: ad un morfismo semantico tra $\mathfrak{J}$-specie corrisponde infatti un morfismo tra i tipi ad esse associati dal funtore T e *viceversa*. La corrispondenza biunivoca determina in tal modo un'equivalenza tra le categorie $\mathbf{SPEC}(\mathfrak{J})$ e $\mathbf{TIP}(\mathfrak{J})$, il che significa, in particolare, che due specie σ e σ' sono equivalenti se e solo se i tipi $T(\sigma)$ e $T(\sigma')$ sono isomorfi. In tal modo la nozione di tipo, nella sua semplicità strutturale, riassume — restando sul piano sintat-

[60] Cioè tale che $\mu_{\mathcal{C}} \cdot \phi_{\sigma'} = \phi_\sigma \cdot \mu_{\mathcal{C}}$, per ogni funtore ϕ: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ che preserva i prodotti finiti e che $\mathcal{O}_\sigma = \mu \cdot \mathcal{O}_{\sigma'}$, dove $\mathcal{O}_\sigma$: ALG$(\sigma,\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ è il funtore di omissione che associa ad un'algebra $\mathcal{A} : \sigma \to \sigma_{\{X_i\}}$ la sua famiglia soggiacente $\{X_i\}$.

[61] Se $\tilde{\mu} : \sigma' \to \sigma$ e $\tilde{\nu} : \sigma'' \to \sigma'$ sono due morfismi semantici tra $\mathfrak{J}$-specie, la composizione $\tilde{\nu} \cdot \tilde{\mu} : \sigma'' \to \sigma$ è data dalla famiglia dei funtori composti $\mu \cdot \nu$: **ALG** $(\sigma,\mathcal{C}) \to$ **ALG** $(\sigma'',\mathcal{C})$.

tico — l'apparentamento tra specie indotto dal confronto delle rispettive realizzazioni algebriche.

La mutua traducibilità tra le due nozioni assicurata dai funtori Σ e T consente d'altra parte d'individuare una situazione sintattica privilegiata. Se $\eta : id_{\mathbf{SPEC}(\mathfrak{I})} \to T \cdot \Sigma$ rappresenta l'unità dell'aggiunzione $T \dashv \Sigma$, il morfismo canonico $\eta_\sigma : \sigma \to \Sigma(T(\sigma))$ misura la differenza tra i due oggetti connessi dalla composizione degli aggiunti. D'altro canto, la specie $\Sigma(T(\sigma))$ è identificabile con la specie $\sigma_{\mathbf{T}}$ definita sulla famiglia degli oggetti del tipo $\mathbf{T} = T(\sigma)$. Il morfismo canonico $\eta_\sigma : \sigma \to \Sigma(T(\sigma)) \simeq \sigma_{\mathbf{T}}$ può dunque essere interpretato come struttura di σ-algebra definita sulla categoria $\mathbf{T} = T(\sigma)$. Tale algebra $\mathcal{G}_\sigma$, detta 'algebra generica' di specie σ, diviene il modello universale per tutte le altre. Piú precisamente: se $\sigma = (\gamma, \mathcal{E})$ è una $\mathfrak{I}$-specie, definiamo l'insieme delle equazioni (ω, ω') soddisfatte da ogni σ-algebra (definibile al variare delle categorie di sostegno) come 'insieme delle conseguenze di $\mathcal{E}$'; un'equazione tra termini di γ è allora una conseguenza di $\mathcal{E}$ se e solo se essa è soddisfatta dall'algebra generica $\mathcal{G}_\sigma$[62].

Questa definizione di conseguenza viene per altro mostrata coincidere con l'usuale, riferita ai modelli di una specie di struttura negli insiemi: infatti, un'equazione tra termini dello schema sottostante risulta essere una conseguenza degli assiomi di una specie σ se e soltanto se essa è soddisfatta da ogni σ-algebra definita su una famiglia d'insiemi.

[62] Se $\sigma_{\{X_i\}}$ e $\mathbf{T}_{\{X_i\}}$ sono rispettivamente la specie ed il tipo associati canonicamente alla famiglia $\{X_i\}$ di oggetti di una categoria $\mathcal{C}$, allora la specie $\Sigma(\mathbf{T}_{\{X_i\}})$ risulta identica a $\sigma_{\{X_i\}}$ (entrambe, in effetti, non fanno che esplicitare in termini di specie la struttura categoriale di cui è provvista la famiglia $\{X_i\}$).

Se ϕ denota l'isomorfismo $\mathbf{ALG}(\sigma, \mathcal{C}) \simeq \mathbf{ALG}(T(\sigma), \mathcal{C})$ e $\mathcal{A} : \sigma \to \sigma_{\{X_i\}}$ è una σ-algebra a valori in $\mathcal{C}$, la corrispondente algebra $\phi(\mathcal{A}) : T(\sigma) \to \mathbf{T}_{\{X_i\}}$ è ottenuta prolungando $T(\mathcal{A}) : T(\sigma) \to T(\sigma_{\{X_i\}})$ (immagine di $\mathcal{A}$, in quanto freccia della categoria **SPEC** ($\mathfrak{I}$), attraverso il funtore 'sintattico' T) lungo l'isomorfismo (counità dell'aggiunzione $T \dashv \Sigma$) $\varepsilon : \Sigma \cdot T \to id_{\mathbf{TIP}(\mathfrak{I})}$ applicato al tipo $T(\sigma_{\{X_i\}}) = T(\Sigma\, \mathbf{T}_{\{X_i\}})$).

La composizione $\phi(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A}) \cdot \varepsilon_{T(\Sigma(\mathbf{T}\{X_i\}))}$ consente cosí di interpretare il morfismo $T(\mathcal{A})$ tra tipi come $T(\sigma)$-algebra definita sulla stessa famiglia $\{X_i\}$ di oggetti, supporto dell'algebra $\mathcal{A}$.

La corrispondenza inversa $\phi^{-1}(\phi(\mathcal{A}))$ riconduce l'algebra $\phi(\mathcal{A})$ all'algebra di partenza $\mathcal{A}$ per mezzo del morfismo composto $\eta_\sigma \cdot \Sigma(\phi(\mathcal{A})) : \sigma \to \Sigma(T(\sigma)) \to \Sigma(\mathbf{T}_{\{X_i\}}) = \sigma_{\{X_i\}}$.

Poiché η_σ definisce l'algebra generica di specie σ, l'identità $\mathcal{A} = \eta_\sigma \cdot \Sigma(\phi(\mathcal{A}))$ permette d'interpretare un'algebra di specie σ come immagine diretta dell'algebra generica $\mathcal{G}_\sigma$: le leggi di composizione di $\mathcal{A}$ sono immagini di quelle di $\mathcal{G}_\sigma$ ed ogni equazione tra le operazioni della specie σ soddisfatta nell'algebra generica $\mathcal{G}_\sigma$ si trasmette pertanto all'algebra $\mathcal{A}$ e perciò ad ogni algebra di specie σ.

La categoria degli insiemi si ripropone in tal modo come l'ambito 'naturale' delle interpretazioni di una specie: essa separa le strutture algebriche, nel senso che, al fine di stabilire l'equivalenza semantica tra due specie σ e σ' è sufficiente restringere il confronto alle categorie **ALG**(σ,**INS**) e **ALG**(σ',**INS**). Si ottiene in tal modo un collegamento diretto tra le specie di struttura (in senso ordinario) e le categorie 'concrete', nella loro accezione intuitiva di strutturazione della classe dei modelli di una data specie: ad un isomorfismo tra queste categorie corrisponde l'isomorfismo tra i tipi associati alle specie che le determinano. La caratterizzazione categoriale della nozione di struttura algebrica restituisce dunque compiutamente il suo significato ordinario: sul piano sintattico i tipi appaiono una formulazione invariante del concetto di specie, su quello semantico le categorie algebriche definite sugli insiemi si configurano come le rappresentanti privilegiate delle sue possibilità di realizzazione.

L'approccio categoriale rileva cosí situazioni inscritte nel funzionamento delle strutture, ritenendone il senso astratto, che le conduce ad una differente scala di generalità, ed adempie con ciò a quella che sembra essere una finalità propria del concetto di struttura: sussistere (cioè darsi al pensiero) in quanto forma, suscettibile di una molteplicità di 'attualizzazioni'. Nel formalismo di Bénabou quest'istanza veniva tradotta, come s'è visto, in una corrispondenza funtoriale che preserva i prodotti finiti. È questa figura generale che, come nell'impianto di Lawvere, sembra riassumere il significato di struttura algebrica. Lo stesso apparato 'sintattico' (la nozione di tipo e quelle che essa sussume) vi si lascia esprimere: i tipi sono infatti interpretabili a loro volta come strutture algebriche di un tipo determinato definite sugli insiemi.

Uno schema γ su $\mathfrak{J}$-termini è dato in effetti da una famiglia d'insiemi $\{\Omega_{i,j}\}_{i,j \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{J}}$ che contengono le operazioni del rango contrassegnato dagli indici. Le successive determinazioni di questa situazione primitiva, ovverosia le specie e i compositori, s'ottengono per composizione di operazioni e proiezioni, vale a dire definendo una struttura sulla famiglia $\{\Omega_{i,j}\}$.

In tal modo una moltiplicazione sullo schema γ si risolve nell'assegnazione di una famiglia di leggi di composizione

$$\kappa_{i,i',j} : \Omega_{i',j} \times \Omega_{i,i_1} \times \ldots \times \Omega_{i,i_n} \rightarrow \Omega_{i,j}$$

che si possono pensare come realizzazioni delle operazioni di uno schema su $\mathfrak{M} \times \mathfrak{J}$ termini.

Bénabou definisce esplicitamente un $\mathfrak{M} \times \mathfrak{I}$-schema Γ tale che una prealgebra $\mathbf{P} : \Gamma \to \mathbf{INS}$ sia identificabile con un $\mathfrak{I}$-schema moltiplicativo munito di proiezioni [63]. La condizione che le moltiplicazioni indotte da Γ siano associative e compatibili con le proiezioni è poi formulabile attraverso un insieme $\mathcal{K}$ di equazioni definite su Γ. Un modello della specie $\mathcal{S} = (\Gamma, \mathcal{K})$ negli insiemi equivale dunque ad un $\mathfrak{I}$-compositore, e ciò stabilisce un isomorfismo tra le categorie $\mathbf{ALG}(\mathcal{S}, \mathbf{INS})$ e $\mathbf{COMP}(\mathfrak{I})$.

Sia allora $\mathcal{T} = T(\mathcal{S})$ il tipo generato dalla specie $\mathcal{S}$. Giacché esso dipende esclusivamente dall'insieme $\mathfrak{I}$ degli indici, se ne ricava che, per ogni insieme $\mathfrak{I}$, esiste un tipo $\mathcal{T}$ su $\mathfrak{M} \times \mathfrak{I}$ termini tale da determinare un'equivalenza tra le categorie $\mathbf{TIP}(\mathfrak{I})$ e $\mathbf{ALG}(\mathfrak{I}, \mathbf{INS})$.

La possibilità di concepire i tipi come algebre fornisce una giustificazione *a posteriori* dell'opportunità di considerare le strutture definite su un'arbitraria famiglia d'oggetti: gli stessi *1*-tipi, in effetti, sono interpretabili come algebre solo a condizione di ammettere strutture definite su un'infinità numerabile d'insiemi. Questa possibilità appare dunque un'esigenza interna della teoria.

Infine, l'identificabilità dei tipi con i modelli del loro ' meta-tipo ' $\mathcal{T}$ consente di far beneficiare la categoria $\mathbf{TIP}(\mathfrak{I})$ dei risultati ottenuti a proposito delle algebre (in particolare l'esistenza dei limiti induttivi e proiettivi) e di tradurre in questo contesto il raffronto tra i tipi e le specie: queste ultime appaiono allora ' presentazioni ' delle $\mathcal{T}$-algebre negli insiemi, e perciò dei tipi. Il tipo $T(\sigma)$ associato ad una $\mathfrak{I}$-specie $\sigma = (\gamma, \mathcal{E})$ è infatti identificabile con la $\mathcal{T}$-algebra libera che ha come insieme di generatori le operazioni di γ, come equazioni primitive gli assiomi $\mathcal{E}$ e ciò avvalora l'approccio teorico che vede nei tipi « il ' vero ' oggetto matematico » [64].

[63] Indichiamo con $\mathfrak{M}'$ il monoide libero generato dal prodotto $\mathfrak{I}' = \mathfrak{M} \times \mathfrak{I}$. Lo schema Γ è allora definito associando ad ogni coppia $(\underline{z}, z) \in \mathfrak{M}' \times \mathfrak{I}'$ tale che $\underline{z} = (\underline{i}, i_1)(\underline{i}, i_2) \ldots (\underline{i}, i_n)$ e $z = (\underline{i}, j)$ un'unica operazione $\tilde{\omega}_{\underline{z}, z}$ e ad ogni coppia $(\underline{z}, z) \in \mathfrak{M}' \times \mathfrak{I}'$ tale che $\underline{z} = 0 \in \mathfrak{M}'$ e $z = (i_1 \ldots i_n, j)$ tante operazioni $\bar{\pi}_{z, h}$ quanti sono gli $i_h = j$ in $i_1 \ldots i_n$. Interpretate negli insiemi, le operazioni dello schema Γ determinano una moltiplicazione (associando a $\tilde{\omega}_{\underline{z}, z}$ l'applicazione $\kappa_{\underline{i}, \underline{i}', j}$ dove $\underline{i}' = i_1 \ldots i_n$ *è* univocamente determinato) e un sistema di proiezioni (definito dalle $\bar{\pi}_{z, h}$).

[64] J. Bénabou, *op. cit.*, p. VI.

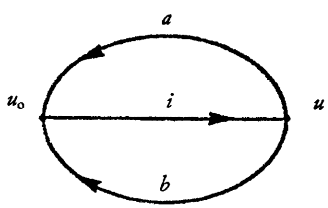
5. - Schizzi ed idee di struttura.

I lavori di Lawvere e Bénabou delineano la prospettiva categoriale lungo la quale possono essere affrontate e approfondite le tematiche proprie dell'algebra universale. Da quest'impostazione, tuttavia, restano escluse quelle strutture che, come le categorie, sono munite di leggi di composizione parzialmente definite.

Ad Ehresmann si deve l'approntamento di un impianto generale in grado di accoglierle ricuperando, in un contesto piú generale, i tipi (ovvero le teorie algebriche) di cui vengono riesaminati, e scomposti in differenti stadi di effettuazione, i meccanismi generatori. Anche in questo caso si tratta di stabilire una corrispondenza da un ' astratto ' a un ' concreto ', ma mutano le situazioni matematiche che ne recitano le parti: cosí, non sono piú le categorie che costituiscono la struttura esplicativa dell'astratto ma i grafi moltiplicativi, come non sono piú i prodotti finiti che delimitano la situazione privilegiata che si trasmette sul concreto, ma la nozione piú comprensiva di cono.

Un ' grafo moltiplicativo ' è costituito da un insieme Γ munito della struttura di grafo orientato (data da una coppia di applicazioni $\alpha, \beta : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$, con $\Gamma \supset \Gamma_0$, che ristrette a Γ_0 coincidono con l'applicazione identica) e da una legge di composizione binaria parzialmente definita e tale che, per ogni $x \in \Gamma$, $\alpha(x) \cdot x = x$ e $x \cdot \beta(x) = x$ e, per ogni coppia componibile (x, y), $\alpha(y) = \beta(x)$, $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x)$ e $\beta(x \cdot y) = \beta(y)$. Possiamo pertanto concepire le funzioni α e β come assegnazioni, ad ogni elemento del grafo, di un dominio e un codominio; Γ_0 rappresenta allora l'insieme delle unità (oggetti) di Γ[65].

Attraverso i grafi moltiplicativi è possibile dare una descrizione schematica delle strutture. Consideriamo per esempio il grafo moltiplicativo Γ_g raffigurato nel diagramma

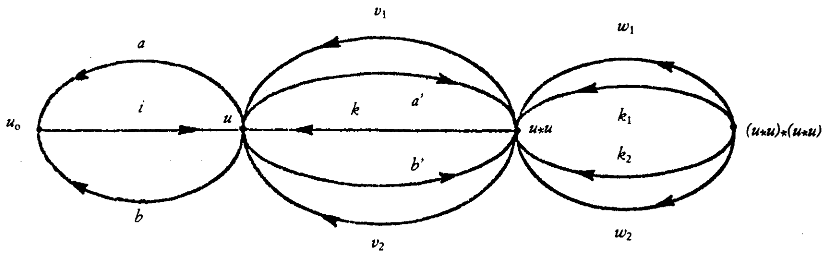


[65] Perché un grafo moltiplicativo sia una categoria occorre dunque la condizione supplementare che la composizione sia associativa e verificata per ogni coppia di frecce ' contigue '.

e munito delle due leggi di composizione: $i \cdot a = u_0$, $i \cdot b = u_0$.

Se $G = (G, \alpha, \beta)$ è un grafo orientato, la corrispondenza $F : \Gamma \to G$ definita da $F(u) = G$, $F(u_0) = G_0$, $F(a) = \alpha$, $F(b) = \beta$, $F(i) = G_0 \hookrightarrow G$ (iniezione canonica)[66] determina un funtore definito su Γ_g a valori nella categoria degli insiemi[67]. Associando ad ogni grafo orientato un analogo funtore, si stabilisce un isomorfismo tra la categoria **GRF** dei grafi e dei relativi morfismi e la categoria dei funtori $F : \Gamma_g \to$ **INS** (che facciano corrispondere all'elemento i un'inclusione) e delle loro trasformazioni naturali. La (specie di) struttura di grafo orientato è ottenuta in tal modo come ' realizzazione ' del grafo moltiplicativo Γ_g.

Anche la struttura di categoria è suscettibile di un'analoga interpretazione: sia Γ_c il grafo moltiplicativo rappresentato dal diagramma



e da alcune leggi di composizione ed identità tra le frecce composte, che tralasciamo di riportare. Un funtore $F : \Gamma_c \to$ **INS** che associ all'elemento i un'iniezione canonica e tale che il prodotto fibrato[68] delle coppie d'applicazioni $(F(a), F(b))$ e $(F(v_1), F(v_2))$ sia costituito rispettivamente dai diagrammi commutativi

[66] La struttura di grafo è assegnata in G dalla coppia d'applicazioni (' dominio ' e ' codominio ') $\alpha, \beta : G \to G_0 \subset G$.

[67] Un funtore tra grafi moltiplicativi è un'applicazione definita sui rispettivi insiemi di sostegno compatibile con le applicazioni α e β e con la composizione. Ehresmann li dice ' neofuntori ', ma per non appesantire troppo la terminologia abbiamo preferito chiamarli funtori, giacché nel caso di questo resoconto informale l'abuso di linguaggio non ingenera equivoci.

[68] Nella categoria degli insiemi e delle applicazioni il prodotto fibrato di una coppia di frecce f_1, f_2 di ugual dominio X è costituito dall'insieme delle coppie $(x, x') \in X \times X$ tali che $f_1(x) = f_2(x')$.

$$\begin{tikzcd} F(u*u) \arrow[r, "F(v_2)"] \arrow[d, "F(v_1)"'] & F(u) \arrow[d, "F(a)"] \\ F(u) \arrow[r, "F(b)"'] & F(u_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F((u*u)*(u*u)) \arrow[r, "F(w_1)"] \arrow[d, "F(w_2)"'] & F(u*u) \arrow[d, "F(v_2)"] \\ F(u*u) \arrow[r, "F(v_1)"'] & F(u) \end{tikzcd}$$

definisce allora una categoria $F(u)$, di cui $F(u_0)$ costituisce l'insieme degli oggetti (identificati con le corrispondenti frecce unità), $F(a)$ e $F(b)$ le applicazioni dominio e codominio, $F(i)$ l'inclusione $F(u_0) \hookrightarrow F(u)$ e $F(u*u)$ l'insieme delle coppie di frecce componibili, di cui $F(k)$ è la legge di composizione [69]. Anche in questo caso si ottiene una categoria (costituita dai funtori $F : \Gamma_C \to$ **INS** che soddisfano le condizioni elencate) che risulta isomorfa a quella delle categorie e dei funtori.

Il grafo moltiplicativo Γ_c esprime cosí l'articolazione astratta della struttura di categoria, che si precisa in termini di specie attraverso le condizioni a cui sono assoggettati i funtori ' modello '.

L'esplicitazione della situazione generale che presiede agli esempi citati ha avuto luogo lungo direzioni diverse, che ne privilegiavano a volta a volta aspetti distinti, portatori ciascuno di differenti motivi d'interesse e di particolari possibilità di caratterizzazione [70]. In tutti i casi,

[69] Il prodotto fibrato di $(F(a), F(b))$, in cui $F(v_1)$ e $F(v_2)$ rappresentano le proiezioni canoniche verso $F(u)$, esprime cosí il fatto che una coppia di frecce è componibile se e solo se esse sono ' contigue ' (il codominio dell'una coincidendo col dominio dell'altra). $F(a')$ e $F(b')$ stabiliscono la componibilità delle frecce con i rispettivi dominî e codominî, identificati con le frecce identiche attraverso $(F(i))$. Infine, il prodotto fibrato di $(F(v_1), F(v_2))$, in cui $(F(w_1)$ e $F(w_2)$ rappresentano le proiezioni verso $F(u*u)$, rende l'oggetto $F((u*u)*(u*u))$ l'insieme delle coppie $((f_1, f_2), (f_3, f_4))$ costituite da coppie di frecce componibili aventi in comune rispettivamente la seconda e la prima componente. $F(k_1)$ e $F(k_2)$ sono le applicazioni che associano $((f_1, f_2), (f_3, f_4))$ alle coppie $(k(f_1, f_2), f_4)$ e $(f_1, k(f_3, f_4))$. Dalla struttura che $F(u)$ eredita da Γ_c viene cosí assicurata l'associatività della composizione di $F(k)$: $F(k_1) \cdot F(k) = F(k_2) \cdot F(k)$.

[70] Fondamentalmente faremo riferimento all'articolo di Ehresmann *Esquisses et types des structures algébriques* (« Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi », XIV/1-2, 1968). Si vedano anche, dello stesso autore *Introduction to the theory of structured categories* (Lawrence, University of Kansas, Technical Report 10, 1966); di A. Bastiani e C. Ehresmann, *Categories of sketched structures* (« Cahiers de topologie et de géométrie differentielle », XIII-2, 1972).

Le costruzioni fondamentali sulle categorie (come prodotti e coprodotti, ugualizzatori e cougualizzatori, prodotti e coprodotti fibrati) costituiscono casi particotuttavia, la chiave della generalità è riposta nella nozione di cono ed in quella di limite che ne rappresenta il dispiegamento ' universale '.

Se $\Phi : \mathbf{X} \to \Gamma$ è un funtore definito su una categoria $\mathbf{X}$ a valori in un grafo moltiplicativo Γ e g è un oggetto di Γ, un c o n o p r o i e t t i v o in Γ di base Φ e vertice g è costituito da una famiglia di frecce di $\Gamma\{\tau_x : g \to \Phi(x)\}_{x \in \mathbf{X}}$ tali che, per ogni morfismo $z : x \to x'$ in $\mathbf{X}$, il diagramma

$$\begin{tikzcd} & g \arrow[dl, "\tau_x"'] \arrow[dr, "\tau_{x'}"] & \\ \Phi(x) \arrow[rr, "\Phi(z)"'] & & \Phi(x') \end{tikzcd}$$

risulti commutativo. Ciò equivale a chiedere che le τ_x siano componenti di una trasformazione naturale $\tau : g \to \Phi$, dove g rappresenta il funtore ' costante ' che ad ogni oggetto x di $\mathbf{X}$ associa il solo elemento g di Γ, ad ogni morfismo $z : x \to x'$ in $\mathbf{X}$ la freccia identità $1_g : g \to g$ in Γ.

Si definisce dualmente la nozione di cono induttivo: se $\Psi : \mathbf{Y} \to \Gamma$ è un funtore definito su una categoria $\mathbf{Y}$ a valori nel grafo moltiplicativo Γ e h è un oggetto di Γ, un ' cono induttivo ' in Γ di base Ψ e vertice h è costituito da una famiglia di frecce di $\Gamma\{\nu_y : \Psi(y) \to h\}_{y \in \mathbf{Y}}$ tali che, per ogni morfismo $w : y \to y'$ in $\mathbf{Y}$, risulti commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \Psi(y) \arrow[rr, "\Psi(w)"] \arrow[dr, "\nu_y"'] & & \Psi(y') \arrow[dl, "\nu_{y'}"] \\ & h & \end{tikzcd}$$

Anch'esse compongono una trasformazione naturale $\nu : \Psi \to h$.

Un ' grafo moltiplicativo con coni ' è allora un grafo moltiplicativo Γ sul quale sono definite una famiglia $\triangle$ di coni proiettivi e una famiglia ∇ di coni induttivi. Se $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ sono le famiglie di categorie su cui sono definiti i funtori base rispettivamente dei coni di Δ e di Λ, la famiglia $\mathfrak{I} = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ è detta ' famiglia degli indici ' del grafo con coni Γ. Se Γ è una categoria e i coni di $\triangle$ e ∇ definiscono in Γ dei limiti rispettivamente proiettivi e induttivi, allora $\Gamma = (\Gamma, \triangle, \nabla)$ si dice ' categoria con limiti ' (sulla famiglia $\mathfrak{I}$)[71]. Se inoltre in Γ non esistono né limiti

lari di limiti. Cfr. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Spinger, 1981 (trad. it.: Torino, Boringhieri, 1977).

[71] Un limite proiettivo in una categoria Γ è un cono proiettivo $\{\tau_x : g \to$

sono definiti i funtori base rispettivamente dei coni di Δ e di ∇, la fa- proiettivi distinti aventi come base uno stesso funtore $\Phi : \mathbf{X} \to \Gamma$ (dove $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$), nei limiti induttivi distinti aventi come base uno stesso funtore $\Psi : \mathbf{Y} \to \Gamma$ (con $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$), la categoria con limiti Γ è detta '$\mathfrak{I}$-prototipo'. Infine, se ogni funtore definito su una categoria appartenente alla famiglia $\mathcal{X}$ e a valori in Γ è base esattamente di un limite proiettivo di Δ, e se ogni funtore definito su una categoria appartenente alla famiglia $\mathcal{Y}$ ed a valori in Γ è base esattamente di un limite induttivo di ∇, allora (Γ, Δ, ∇) è detta '$\mathfrak{I}$-tipo'.

La sequenza

grafi moltiplicativi con coni $\to$ prototipi $\to$ tipi

descrive cosí una catena d'inclusioni tra specie di strutture progressivamente piú complesse. Relativamente a una famiglia $\mathfrak{I}$ di categorie 'indice', esse danno luogo alle categorie $\mathfrak{I}$-**GRF**$_{coni}$, $\mathfrak{I}$-**PROTO**, $\mathfrak{I}$-**TIP** i cui morfismi sono costituiti da funtori compatibili con i coni e i limiti. L'inclusione tra le specie s'interpreta allora come funtore d'inclusione tra le rispettive categorie.

Ehresmann costruisce aggiunti sinistri per ciascuni di essi: ad un grafo moltiplicativo con coni Γ vengono in tal modo associati 'universalmente' un prototipo $P(\Gamma)$ e un tipo $T(\Gamma)$. Se Γ s'immerge iniettivamente nel prototipo generato $T(\Gamma)$, cioè se s'identifica con un suo sottografo moltiplicativo, viene allora chiamato 'schizzo'. La categoria soggiacente al prototipo generato da uno schizzo risulta allora sottocategoria della sottocategoria soggiacente al tipo generato dallo schizzo, mentre $T(P(\Gamma)) = T(\Gamma)$.

Uno 'schizzo puntato' $\Sigma = (\Gamma, \Lambda)$ è infine uno schizzo (Γ, Δ, ∇) dove $\Lambda \subset \Gamma$ è una famiglia di elementi 'distinti' del grafo soggiacente. Si definiscono in modo analogo i prototipi e i tipi puntati richiedendo che i funtori P e T facciano corrispondere ad uno schizzo puntato (Γ, Λ) rispettivamente il prototipo puntato $(P(\Gamma), \Lambda)$ e il tipo puntato $(T(\Gamma), \Lambda)$.

Se Σ è uno schizzo puntato, si definisce allora 'struttura algebrica' di specie Σ un funtore $\sigma : \Sigma \to$ **INS** che invia i coni di Γ in limiti proiet-

$\Phi(x)\}_{x \in \mathbf{X}}$ che gode della proprietà universale: se $\{\Theta_x : g' \to \Phi(x)\}_{z \in \mathbf{X}}$ è un altro cono proiettivo definito sulla stessa base, allora esiste un unico morfismo $\mu : g' \to g$ in Γ tale che, per ogni $x \in \mathrm{X}$, $\Theta_x = \mu \cdot \tau_z$. Dualmente, un limite induttivo in Γ è un cono induttivo $\{\nu_y : \Psi(y) \to b\}_{y \in \mathbf{Y}}$ tale che per ogni altro cono induttivo $\{\pi_y : \Psi(y) \to b'\}_{y \in \mathbf{Y}}$ esiste ed è unico un morfismo $\xi : b \to b'$ di Γ tale che, per ogni $y \in \mathrm{Y}$, $\eta_y = \nu_y \cdot \xi$.

tivi e induttivi definiti sugli insiemi e la famiglia degli elementi distinti in una famiglia di elementi della categoria. In particolare se Σ è un prototipo o un tipo, una struttura algebrica di specie Σ è un funtore che preserva i limiti. In tutto ciò la categoria degli insiemi agisce a sua volta come un tipo, il che consente di formulare la nozione piú generale di struttura relativamente ad un qualsiasi tipo puntato $\mathbf{T}$ sulla famiglia di indici $\mathfrak{I}$, definendo in tal modo una specie in un'arbitraria categoria che ammetta $\mathfrak{I}$-limiti.

Sia $\mathbf{STR}(\Sigma,\mathbf{T})$ la categoria delle strutture di specie Σ in $\mathbf{T}$, i cui morfismi siano costituiti dalle trasformazioni naturali definite tra i funtori modello. Sussiste allora un isomorfismo tra le categorie $\mathbf{STR}(\Sigma,\mathbf{T}) \simeq \simeq \mathbf{STR}(P(\Sigma),\mathbf{T}) \simeq \mathbf{STR}(T(\Sigma),\mathbf{T})$.

I grafi orientati e le categorie costituiscono esempi di strutture algebriche definibili mediante uno schizzo. Il grafo moltiplicativo Γ_g considerato in precedenza è infatti uno schizzo sulla famiglia di indici vuota (in altre parole è uno schizzo privo di coni); scegliendo i come suo elemento distinto, si definisce lo schizzo puntato $\Sigma_g = (\Gamma_g,\{i\})$. I funtori modello $\sigma : \Sigma_g \to \mathbf{INS}$ inviano l'elemento i di Γ_g sulla classe delle iniezioni canoniche In; la coppia $\mathbf{INS}* = (\mathbf{INS}, In)$ costituisce un $\emptyset$-tipo puntato, mentre la categoria dei grafi $\mathbf{GRF}$ s'identifica, a meno d'isomorfismi, con la categoria $\mathbf{STR}(\Sigma_g,\mathbf{INS}*)$.

Anche la definizione di categoria come realizzazione del grafo moltiplicativo Γ_c è interpretabile come specie di struttura determinata da uno schizzo puntato di cui Γ_c costituisce il grafo moltiplicativo soggiacente. In effetti, sia $\mathbf{2}$ la categoria rappresentata dal diagramma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[loop below, "id_1"] & 0 \arrow[loop below, "id_0"] & 2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[loop below, "id_2"] \end{tikzcd}$$

Si considerino i funtori $\Phi, \Phi' : \mathbf{2} \to \Gamma_C$ tali che $\Phi(d_1) = a$, $\Phi(d_2) = b$ e $\Phi'(d_1) = v_1$, $\Phi'(d_2) = v_2$. I limiti proiettivi che sono immagine, nella categoria degli insiemi, dei coni

$$\begin{tikzcd} & u*u \arrow[dl, "v_2 = \tau_1"'] \arrow[d, "\tau_0"] \arrow[dr, "\tau_2 = v_1"] & \\ \Phi(1) \arrow[r, "\Phi(d_1) = a"'] \arrow[d, equal] & \Phi(O) \arrow[d, equal] & \Phi(2) \arrow[l, "\Phi(d_2) = b"] \arrow[d, equal] \\ u & u_0 & u \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & (u*u)*(u*u) \arrow[dl, "w_2 = \tau_1'"'] \arrow[d, "\tau'_0"] \arrow[dr, "\tau'_2 = w_1"] & \\ \Phi'(1) \arrow[r, "\Phi'(d_1) = v_1"'] \arrow[d, equal] & \Phi'(O) \arrow[d, equal] & \Phi'(2) \arrow[l, "\Phi'(d_2) = v_2"] \arrow[d, equal] \\ u*u & u & u*u \end{tikzcd}$$

definiscono nelle strutture modello dei prodotti fibrati. Scegliendo allora l'elemento distinto i di Γ_C, si ottiene uno schizzo puntato $\Sigma_C = (\Gamma_C, \Delta, \{i\})$ dove $\Delta = \{\tau, \tau'\}$. Un funtore $\sigma : \Gamma_C \rightarrow$ **INS** che invia i coni di Δ in limiti proiettivi definiti sugli insiemi e tale che $\sigma(i)$ sia un'iniezione canonica determina in tal modo una struttura di categoria, ed anche in questo caso si ottiene un isomorfismo tra le categorie **STR**(Γ_C,**INS**$*$) $\simeq$ **CAT**. D'altra parte, se $\mathcal{C}$ è una categoria che ammette limiti proiettivi sulla categoria **2** (vale a dire se è un ($\{$**2**$\}$,$\varnothing$-tipo) e se $\mathcal{C}_\mu$ è la classe dei suoi monomorfismi, i funtori $\tilde{\sigma} : \Gamma_C \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{C}_\mu)$ compatibili con i coni proiettivi forniscono una procedura per definire la struttura di categoria sugli oggetti di $\mathcal{C}$.

Questi esempi sono sufficienti a chiarire la prospettiva di fondo della teoria: essa s'incentra sulla nozione di limite come quella in grado di riassumere, nel linguaggio categoriale, le costruzioni necessarie alla definizione delle strutture. La situazione matematica piú elementare in cui questa ricognizione ha luogo è costituita dagli schizzi: i coni (ossia i limiti spogliati delle loro proprietà ' universali ') vi compaiono come indicatori astratti che concorrono ad isolare una forma in cui è delineata l'architettura portante delle strutture ' concrete ' che lo schizzo è destinato a rappresentare. Queste vengono riguadagnate ripristinando l'intreccio dei rapporti coinvolto in ogni costruzione universale, che è proprio della descrizione categoriale degli oggetti matematici. Sicché l'universale è il concreto, e nel passaggio dai coni ai limiti [72] è racchiuso il senso dell'impianto di Ehresmann.

Gli schizzi, d'altra parte, costituiscono sottostrutture dei prototipi e dei tipi, che ne costituiscono due differenti modi di ' completamento ': tutte queste strutture danno luogo a modelli indistinguibili, rappresentando in tal modo descrizioni di una specie di struttura di cui il tipo determina quella ' massimale ' (o invariante), analogamente a quanto avveniva con le teorie algebriche nella semantica funtoriale: in effetti un ' tipo algebrico ' nel senso di Bénabou rappresenta un $\mathfrak{I}$-tipo nell'accezione di Ehresmann.

Tra i tipi e gli schizzi, oltre ai prototipi, si colloca una serie di situazioni intermedie che rappresentano ulteriori specificazioni della struttura di grafo moltiplicativo con coni, base della costruzione [73]. In una

[72] Cfr. la nota precedente.

[73] La postulazione dei coni induttivi consente di riportare a quest'impianto un ampio spettro di strutture, comprendente i campi e le topologie.

prospettiva piú generale[74] questa struttura può essere assunta direttamente come descrizione delle strutture: ad essa si associano ' universalmente ' diversi completamenti che determinano categorie di modelli non piú isomorfe, nel caso generale, ma equivalenti a quella definita dalla situazione primitiva.

Infine, la stessa situazione rappresentata dagli schizzi può essere ulteriormente analizzata, nella ricerca degli schizzi ' minimali ' che ammettono lo stesso completamento in un tipo: ciò conduce alla nozione di ' idea di struttura ', sottografo ' invariante ' di uno schizzo rispetto ai modelli. In tal modo gli elementi a, b, i, k dello schizzo Σ_c costituiscono un'' idea ' di categoria: due funtori modello coincidenti sull'insieme $\{a, b, i, k\}$ determinano la stessa struttura[75].

[74] Svolta da A. Bastiani e C. Ehresmann nello scritto *Categories of sketched structures* (cit.).

[75] Sulle ' idee di struttura ' cfr. C. Ehresmann, *Introduction to the theory of structured categories* (cit.) e C. Lair, *Idées et maquettes de structures algébriques* (« Cahiers de topologie et de géométrie differentielle », XII-1, 1971).

Nonostante gli elementi d'interesse che indubbiamente presenta, la teoria degli schizzi non sembra aver suscitato grandi attenzioni presso gli specialisti del settore: una certa macchinosità dell'impianto, le sue ridotte attrattive estetiche, una terminologia spesso oscura (coltivata per molto tempo dalla scuola di Ehresmann in un iniziatico isolamento), nonché una notazione quasi bizantina, non hanno favorito la sua fortuna.

BIBLIOGRAFIA GENERALE

P. ALEXANDROFF e H. HOPF, *Topologie I*, Berlino, Springer, 1935.

R. BAER, *The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, «American Journal of Mathematics», LXI (1938), pp. 1-44;

— *The applicability of lattice theory to group theory*, « Bulletin of the American Mathematical Society », XLIV (1938), pp. 817-820.

J. BÉNABOU, *Structures algébriques dans les catégories*, « Cahiers de topologie et de géométrie differentielle », X-1, 1968), pp. 1-126.

G. BIRKHOFF, *On the combination of subalgebras*, « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society », XXIX-4 (1933), pp. 441-464;

— *On the lattice theory of ideals*, « Bulletin of the American Mathematical Society », XL (1934), pp. 613-619;

— *On the structure of abstract algebras*, « Proceedings of the Cambridge Philosophical Society », XXXI-4 (1935), pp. 433-454;

— *On the combination of topologies*, « Fundamenta Mathematicae », XXVI (1936), pp. 156-166;

— e J. VON NEUMANN, *The logic of quantum mechanics*, « Annals of Mathematics », XXXVII (1936), pp. 823-843;

— *Lattices and their applications*, « Bulletin of the American Mathematical Society », XLIV (1938), pp. 793-800;

— *Lattice Theory*, New York, The American Mathematical Society, 1948.

G. BLANC, *Foncteurs types et structures*, Amiens, Esquisses Mathématiques, 14, 1972.

M. BÔCHER, *The fundamental conceptions and methods of mathematics*, « Bulletin of the American Mathematical Society », X (1904), pp. 115-135.

N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles - Fascicule de résultats*, Parigi, Hermann, A. S. I., 1939;

— *L'architecture des mathématiques* (in F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathematiques*, Marsiglia, Cahiers du Sud, 1948);

— *Foundations of mathematics for the working mathematician*, « Journal of Symbolic Logic », XIV-1 (1949), pp. 1-8;

— *Structures*, Parigi, Hermann, A. S. I. 1258, 1957;

— *Éléments d'histoire des mathématiques*, Parigi, Herman, 1960 (trad. it., Milano, Feltrinelli, 1962);

— *Algèbre*, Parigi, Hermann, 1970;

— *Topologie générale*, Parigi, Hermann, 1971;

— *Théorie des ensembles*, Parigi, Hermann, 1977.

J. C. Bringuer, *Conversations libres avec J. Piaget*, Parigi, Laffont, 1977.

L. Brunschvicg, *Sur l'implication et la dissociation des notions*, « Revue de Métaphysique et de Morale », 1908, pp. 751-760;

— *Les étapes de la philosophie mathématique*, Parigi, Alcan, 1912;

— *L'idée de la verité mathématique*, « Bulletin de la Société Française de Philosophie », XIII, 1913, pp. 1-46;

— *L'oeuvre d'Henri Poincaré. Le philosophe*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XXI, 1913, pp. 585-616.

C. Burali-Forti, *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel* (in *Bibliotèque du Congrès International de Philosophie, Paris 1900*, Parigi, Colin, 1901, vol. III, pp. 289-307).

H. Cartan, *Sur le fondement logique des mathématiques*, « Revue Scientifique », LXXXI (1943), pp. 3-11.

E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, Feltrinelli, 1964.

A. Cayley, *Theory of groups: graphical representation*, « American Journal of Mathematics », I (1878), pp. 50-52;

— *On the theory of groups*, « Proceedings of the London Mathematical Society », IX (1878), pp. 126-133;

— *On the theory of groups*, « American Journal of Mathematics », XI (1889), pp. 139-157.

E. Čech, *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, « Fundamenta Mathematicae », XIX (1932), pp. 148-183.

C. Chevalley, *Rigueur et méthode axiomatique*, « Recherches Philosophiques », II-2 (1932), pp. 257-261;

— *Variations du style mathématique*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XLII (1935), pp. 375-384;

— e A. Dandieu, *Logique hilbertienne et psychologie*, « Revue Philosophique » (1932), pp. 99-111.

G. Choquet, *L'analyse et Bourbaki*, « L'Enseignement mathématique », t. VIII, 1962, pp. 109-135.

P. M. Cohn, *Universal Algebra*, New York, Harper and Row, 1965 (trad. it. Milano, Feltrinelli, 1971).

L. COUTURAT, *Contre le nominalisme de M. Le Roy*, « Revue de Métaphysique et de Morale », VIII (1900), pp. 87-93;

— *Définitions et démonstrations mathématiques*, « L' Enseignement mathématique », VII (1905), pp. 105-121.

R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg, 1969[10].

J. L. DESTOUCHES, *Les aperçus philosophiques de Borel et Fréchet*, « Epistemologia », IV-1 (1981), pp. 133-149.

J. DESANTI, *Remarques sur la connexion des notions de genèse et de structure en mathématiques* (in *Entretiens sur les notions de genèse et structure*, La Haye, 1965, pp. 143-155).

J. DIEUDONNÉ, *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*, « Revue Scientifique », vol. LXXVII, 1939, pp. 224-232;

— *David Hilbert (1862-1943)* (in F. Le Lionnais, *Les grands courantes de la pensée mathématique*, 1948);

— *L'axiomatique dans les mathématiques modernes* (in *Compte rendu du Congrès International de Philosophie des Sciences, Paris 1949*, Parigi, Hermann, 1951, pp. 47-53);

— *The work of Nicholas Bourbaki*, « American Mathematical Monthly », 1970, pp. 134-145;

— *Cours de géométrie algébrique*, 1: *Aperçu historique sur le développement de la géométrie*, Parigi, P. U. F., 1974;

— *L'abstraction et l'intuition mathématique*, « Dialectica », XXIX (1975), pp. 39-54;

— *Panorama des mathématiques pures. La choix bourbochique*, Parigi, Gauthier-Villars, 1977;

— *Avant-propos* a A. Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Parigi, Union Générale d'Éditions, 1977;

— *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900* (direzione dell'opera), 2 voll., Parigi, Hermann, 1978;

— *La difficile naissance des structures mathématiques (1840-1940)* (in *La culture scientifique dans le monde contemporain*, « Scientia », volume speciale, 1979, pp. 9-26);

— *Bourbaki et la philosophie des mathématiques*, « Epistemologia », vol. IV-1 (1981), pp. 173-188;

— *Logica e matematica nel 1980* (in *La nuova ragione. Scienza e cultura nella società contemporanea*, Bologna, Scientia/Il Mulino, 1981, pp. 15-26);

— *History of Functional Analysis*, Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies 49, 1981;

— *The work of Bourbaki during the last thirty years*, « American Mathematical Society Notices », 1982, pp. 618-623.

H. DUFUMIER, *La généralisation mathématique*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XIX (1911), pp. 723-758.

P. DUGAC, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Parigi, Vrin, 1976.

A. EHRESMANN-BASTIANI, *Comments on Part II-1* di *Charles Ehresmann oeuvres complètes et commentées* - II-1: *Structures locales*, Amiens 1981;

— *Comments on part IV-1* di *Charles Ehresmann oeuvres complètes et commentées* - IV-1: *Esquisses et complétions*, Amiens 1981;

— *From fibre bundles to categories (Charles Ehresmann and the categories)*, « Cahiers de topologie et de géométrie différentielle catégoriques », XXV-1 (1984), pp. 15-35);

— e C. EHRESMANN, *Categories of sketched structures*, « Cahiers de topologie et de géométrie differentielle », vol. XIII-2 (1972), pp. 105-214).

C. EHRESMANN, *Gattungen von Lokalen Strukturen*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », LX, 1957, pp. 49-77;

— *Catégorie des foncteurs types*, « Revista de la Union Matematica Argentina », XX, 1960, pp. 194-209;

— *Introduction to the theory of structured categories*, Lawrence, University of Kansas, Technical Report 10, 1966;

— *Sur les structures algébriques*, « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », 264, serie A (1967), pp. 840-843;

— *Esquisses et types des structures algébriques*, « Buletinul Institutului Politehnic Din Iasi », XIV (1968), pp. 1-14;

— *Construction de structures libres* (in *Reports of the Midwest Category Seminar II*, Springer Lecture Notes in Mathematics 61, 1968, pp. 74-104).

S. EILENBERG → v. S. MAC LANE.

S. FEFERMAN, *Set-theoretical foundations of category theory* (in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, Berlino - New York, Springer (Lecture Notes in Mathematics 106), 1969, pp. 201-232).

M. FRÉCHET, *Le dimensions d'un ensemble abstrait*, « Mathematische Annalen », LXVIII (1910), pp. 145-168;

— *Les espaces abstraits*, Parigi, Gauthier-Villars, 1928;

— *Les mathématiques et le concret*, Parigi, P. U. F., 1955.

M. GALUZZI, *Trasformazioni naturali/categorie* (in *Enciclopedia*, vol. XIV, Torino, Einaudi, 1981, pp. 495-514).

Y. GAUTHIER, *La notion théoretique de structure*, « Dialectica », XXIII (1969), pp. 217-227;

— *Fondements des mathématiques*, Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976.

H. GERICKE, *Über den Begriff der algebraischen Struktur*, « Archiv der Mathematik », IV (1953), pp. 163-171.

M. GIRARDI → v. G. ISRAEL.

V. GLIVENKO, *Théorie générale des structures*, Parigi, Hermann, 1938.

G. GRÄTZER, *Universal Algebra*, Princeton, Van Nostrand, 1968.

A. A. GRAU, *Ternary Boolean Algebra*, « Bulletin of the American Mathematical Society », LIII (1947), pp. 567-572.

J.-B. GRIZE, *Analyses pour servir à l'étude épistémologique de la notion de fonction* (in J. Piaget e altri, *Epistémologie et psychologie de la fonction*, Parigi, P. U. F., 1968).

J. HADAMARD, *Le calcul fonctionnel*, « L'Enseignement mathématique », XIV (1912), pp. 5-18.

P. HALMOS, *Nicolas Bourbaki*, « Scientific American », CLXIX (1957), pp. 88-99.

W. HATCHER, *Foundations of Mathematics*, Filadelfia, Saunders, 1968 (trad. it. Torino, Boringhieri, 1973).

J. HERBRAND, *Les bases de la logique hilbertienne*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XXXVII (1930), pp. 243-255.

P. J. HIGGINS, *Groups with multiple operators*, « Proceedings of the London Mathematical Society », VI (1956), pp. 336-416;

— *Algebras with a scheme of operators*, « Mathematische Nachrichten », XXVII (1963-64), pp. 115-132.

D. HILBERT, *Über den Zahlbegriff*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », VIII (1900), pp. 180-184;

— *Über die Grundlagen der Geometrie*, « Mathematische Annalen », LVI (1902), pp. 381-422;

— *Axiomatisches Denken*, ivi, LXXVIII (1918), pp. 405-415;

— *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, ivi, LXXXVIII (1923), pp. 151-165;

— *Die Grundlagen der Mathematik*, « Abhandlungen aus dem mathemathische Seminar der Hamburgischen Universität », VI (1929), pp. 59-85;

— *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, « Mathematische Annalen », CII (1929), pp. 1-9.

E. V. HUNTINGTON, *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude*, « Transactions of the American Mathematical Society », III, 1902, pp. 264-279;

— *Complete sets of postulates for the theory of real quantities*, ivi, IV, 1903, pp. 358-370.

G. ISRAEL e L. LOMBARDO-RADICE, *Alcune recenti linee di tendenza della matematica contemporanea* (in M. Daumas, *Storia della Scienza* - II. *Le scienze matematiche e l'astronomia*, Bari, Laterza, 1969);

— e M. GIRARDI, *Teoria dei campi*, Milano, Feltrinelli, 1976;

— *Un aspetto ideologico della matematica contemporanea: il " bourbakismo "* (in *Matematica e fisica: Struttura e ideologia*, Bari, De Donato, 1977, pp. 35-70;

— *" Rigore " e " assiomatica " nella matematica moderna* (in *Scienza e storia: analisi critica e problemi attuali*, Roma, Critica marxista/Editori Riuniti, 1980, pp. 427-450).

M. KELLY, *Saunders Mac Lane and Category Theory* (in S. Mac Lane, *Selected Papers*, Berlino - New York, Springer, 1979, pp. 527-543).

A. B. KEMPE, *A Memoir on the Theory of Mathematical Form*, « Philosophical Transactions of the Royal Society », CLXXVII (1886), pp. 1-70;

— *Note to a Memoir on the Theory of Mathematical Form*, « Proceedings of the Royal Society », XLII (1887), pp. 193-196;

— *On the Relation between the Logical Theory of Classes and the Geometrical Theory of Points*, « Proceedings of the London Mahematical Society », XXI (1890), pp. 147-182;

— *The Subject-Matter of Exact Thought*, « Nature », XLIII (1890), pp. 156-162;

— *Mathematics*, « Proceedings of the London Mathematical Society », XXVI (1894), pp. 5-15.

F. KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, Deichert, 1872.

F. KLEIN-BARMEN, *Grundzüge der Theorie der Verbände*, « Mathematische Annalen », CXI (1935).

G. KOETHE, *Die theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektive Geometrie*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinugung », XLVII (1937), pp. 125-144;

— *Nicolas Bourbaki, die neue Ordnung der Mathematik* (in *Forscher und Wissenschaftler im heutigen Europa*, I, Oldenburg, Stalling, 1955, pp. 367-375).

G. KREISEL, *Category Theory and the Foundations of Mathematics* (in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, Berlino - New York, Springer (Lecture Notes in Mathematics 106), 1969, pp. 233-245);

— *Observations on popular discussions about foundations* (in *Axiomatic Set Theory*, « Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics », vol. XIII (1), 1971, pp. 189-198).

D. LACOMBE, *Sur la méthode extensive en métamathématique*, « Revue Scientifique », LXXXV (1947), pp. 515-518;

— *Les idées actuelles sur la structure des mathématiques* (in Centre International de Synthèse, *Notion de structure et structure de la connaissance*, Parigi, Albin Michel, 1957, pp. 39-135).

A. LAUTMAN, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Parigi, Union Générale d'Éditions, 1977.

F. W. LAWVERE, *Functorial semantics of algebraic theories* (inedito), Columbia University, 1963;

— *Functorial Semantics of algebraic Theories*, « Proceedings of the National Academy of Science », L (1963), pp. 869-872;

— *An elementary theory of the category of sets*, ivi, LII, 1964, pp. 1506-1510;

— *Algebraic theories, algebraic categories and algebraic functors* (in *Symposium on the theory of Models*, Amsterdam, North-Holland, 1965, pp. 413-418);

— *The category of categories as a foundation for mathematics* (in *Proceedings on the Conference on Categorical Algebra - La Jolla 1965*, Berlino - New York, Springer, 1966, pp. 1-20);

— *Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories* (in *Reports of the Midwest Category Seminar II*, Berlino - New York, Springer (Lectures Notes on Mathematics 61), 1968, pp. 41-61).

É. Le Roy e G. Vincent, *Sur la méthode mathématique*, « Revue de Métaphysique et de Morale », II (1894), pp. 505-530 e 676-708;

É. Le Roy, *Science et philosophie*, ivi, VII (1899) e VIII (1900) (trad. it. Lanciano, Carabba, 1913);

— *La pensée mathématique pure*, Parigi, P. U. F., 1960.

G. Lolli, *Categorie, universi e principi di riflessione*, Torino, Boringhieri, 1977.

L. Lombardo-Radice, *Elementi di algebra astratta*, Milano, Feltrinelli, 1965;

— e G. Israel → v. G. Israel.

S. Mac Lane e S. Eilenberg, *Natural isomorphisms in group theory*, « Proceedings of the National Academy of Science », XXVIII (1942), pp. 537-543;

— *General theory of natural equivalences*, « Transactions of the American Mathematical Society », vol. LVI, 1945, pp. 231-294.

S. Mac Lane, *Duality for groups*, « Bulletin of the American Mathematical Society », LVI (1950), pp. 485-516;

— *Locally small categories and the foundations of set theory* (in *Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw 1959*, Oxford, Pergamon Press, 1961);

— *Possible programs for categorists* (in *Category Theory, Homology Theory and their Applications*, vol. I, Berlino - New York, Springer (Lecture Notes in Mathematics 86), 1969, pp. 123-131);

— *Foundations for categories and sets* (ivi, vol. II, Berlino - New York, Springer (Lecture Notes in Mathematics 92), 1969, pp. 146-164);

— *One universe as a foundation for category theory* (in *Reports of the Midwest Category Seminar III*, Berlino - New York, Springer (Lecture Notes in Mathematics 106), 1969, pp. 192-200);

— *The influence of M. H. Stone on the origins of category theory* (in *Functional Analysis and related fields*, Berlino - New York, Springer, 1970, pp. 228-241);

— *Categorical algebra and set-theoretic foundations* (in *Axiomatic Set Theory*, « Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics », vol. XIII (1), 1971, pp. 231-240);

— *The genesis of mathematical structures, as exemplified in the work of Charles Ehresmann*, « Cahiers de topologie et de géométrie differentielle », XXI-» (1980), pp. 353-365;

— *Mathematical Models: a sketch for the philosophy of mathematics*, « American Mathematical Monthly », 1981, pp. 462-472;

— *History of abstract algebra: origin, rise, and decline of a movement* (in *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics*, Texas Tech University, Mathematics Series 13, 1981, pp. 3-35).

C. MANGIONE, *La svolta della logica nell'Ottocento* (in L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, vol. V, Milano, Garzanti, 1971, pp. 92-161);

— *La logica nel ventesimo secolo (II)* (ivi, vol. VII, pp. 519-653).

J. MANIN, *Applicazioni* (in *Enciclopedia*, vol. I, Torino, Einaudi, 1977, pp. 701-743);

— *Dualità* (ivi, vol. V, 1978, pp. 126-178);

— *Strutture matematiche* (ivi, vol. XIII, 1981, pp. 765-798).

F. I. MAUTNER, *An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory*, « American Journal of Mathematics », LXVIII (1946), pp. 345-384.

K. MENGER, *Bemerkungen zur Grundlagenfragen IV - Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », XXXVII (1928), pp. 309-325;

— *Non-euclidean geometry of joining and intersection*, « Bulletin of the American Mathematical Society », XLIV (1938), pp. 821-824.

G. A. MILLER, *What is group theory?*, « Popular Science Monthly », LXIV (1904), pp. 369-374;

— *Definitions of abstract groups*, « Annals of Mathematics », XXIX (1927-28), pp. 223-228.

E. H. MOORE, *A definition of abstract groups*, « Transactions of the American Mathematical Society », 1902, pp. 485-492;

— *On a definition of abstract groups*, ivi, 1905, pp. 179-180;

— *Introduction to a form of general analysis*, New Haven, Yale University Press, 1910.

O. ORE, *On the foundation of abstract algebras*, « Annals of Mathematics », XXXVI (1935), pp. 406-437 e vol. XXXVII, 1936, pp. 265-292;

— *On the decomposition theorems of algebra* (in *Congrès International des Mathématiciens*, vol. I, Oslo 1936, pp. 297-307).

— *L'algèbre abstraite*, Parigi, Hermann, A. S. I. 362, 1936;

— *On the theorem of Jordan-Hölder*, « Transactions of the American Mathematical Society », XLI (1937), pp. 266-275;

— *Structure and group theory*, « Duke Mathematical Journal », III (1937), pp. 149-174 e IV (1938), pp. 247-269;

— *The application of structure theory to groups*, « Bulletin of the American Mathematical Society », vol. XLIV, 1938, pp. 801-806.

A. PADOA, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie deductive quelconque* (in *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Paris, 1900*, vol. III, Parigi, Colin, 1901, pp. 309-365);

— *Le problème n. 2 de M. David Hilbert*, « L'Enseignement mathématique », V (1903), pp. 85-91;

— *D'où convient-il de commencer l'arithmétique?*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XIX (1911), pp. 549-554.

G. PEANO, *Sul concetto di numero*, « Rivista di Matematica », I (1891), pp. 87-102 e 252-267;

— *Les définitions mathématiques* (in *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Paris 1900*, vol. III, Parigi, Colin, 1901, pp. 279-288);

— *Le definizioni in matematica*, Barcellona, Publicaciones de l'Institut de Ciencies, 1911.

J. PETITOT, *Uno/Molti* (in *Enciclopedia*, vol. XIV, Torino, Einaudi, 1981, pp. 681-741).

J. PIAGET, *Introduction à l'épistémologie génétique*, 1. *La pensée mathématique*, Parigi, P. U. F., 1949;

— *Le strutture matematiche e le strutture operatorie dell'intelligenza* (in *L'insegnamento della matematica*, Firenze, La Nuova Italia, 1960, pp. 1-34; ediz. orig., Neuchâtel - Parigi, 1935);

— e E. W. BETH, *Épistémologie mathématique et psychologie: essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle*, Parigi, P. U. F., 1961;

— *Logique et connaissance scientifique* (direzione dell'opera), Encyclopédie de la Pléiade, XXII, Parigi, Gallimard, 1966;

— e altri, *Épistémologie et psychologie de la fonction*, Parigi, P. U. F., 1968;

— *L'épistémologie génétique*, Parigi, P. U. F., 1970 (trad. it., Bari, Laterza, 1971);

— *Genetic Epistemology*, New York, Columbia University Press, 1970 (trad. it., Roma, Armando, 1972);

— *Psychologie et épistémologie*, Parigi, Gonthier, 1970 (trad. it., Torino, Loescher, 1974).

M. PIERI, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique* (in *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Paris 1900*, vol. III, Parigi, Colin, 1901, pp. 367-404);

— *Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique*, « Revue de Métaphysique et de Morale », 1906, pp. 196-207.

H. POINCARÉ, *L'espace et la géométrie*, « Revue de Métaphysique et de Morale », III (1895), pp. 631-646;

— *On the foundations of geometry*, « The Monist », IX (1898-1899), pp. 1-43 (trad. franc. Parigi, Chiron, 1921);

— *La Science et l'hypothèse*, Parigi, Flammarion, 1902;

— *La valeur de la science*, ivi, 1905;

— *Science et méthode*, ivi, 1909;

— *Dernières pensées*, ivi, 1913;

— *Rapport sur les travaux de M. Cartan* (« Acta Mathematica », XXXVIII (1921), pp. 137-145).

J. F. Price, *Sets or arrows: a foundational duality?*, « Epistemologia », II-2 (1979), pp. 269-294.

R. Queneau, *Bourbaki et les mathématiques de demain*, « Critique », 1962, pp. 3-18.

P. Samuel, *On universal mappings and free topological groups*, « Bulletin of the American Mathematical Society », LIV (1948), pp. 591-598.

P. Scheurer, *Révolutions de la science et permanence du réel*, Parigi, P. U. F., 1979.

Z. Semadeni, *Struktury w sensie Bourbakiego i kategorie*, « Annales Societatis Mathematicae Polonae, Commentationes Mathematicae », X (1966), pp. 37-50.

J. Sonner, *On the formal definition of categories*, « Mathematische Zeitschrift », LXXX (1962), pp. 163-176.

E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körpern*, « Journal de Crelle », CXXXVII (1910), pp. 167-309.

M. H. Stone, *Boolean algebras and their application to topology*, « Proceedings of the National Academy of Science », XX (1934), pp. 197-202;

— *Subsumtion of Boolean algebras under the theory of rings*, ivi, XXI (1935), pp. 103-105;

— *The theory of representations for Boolean algebras*, « Transactions of the American Mathematical Society », XL (1936), pp. 37-111;

— *Applications of the theory of Boolean rings to the general topology*, ivi, XLI (1937), pp. 375-481;

— *The representation of Boolean algebras*, « Bulletin of the American Mathematical Society », XLIV (1938), pp. 807-816.

R. Thom, *Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?*, « L'Age de la Science », III-3 (1970), pp. 225-242.

T. Tonietti, *Il Bourbakismo*, in *La matematica è un'opinione*, « Testi & Contesti », VI (1982), pp. 11-29.

B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, 2 voll., Berlino, Springer, 1930-1931;

— *On the sources of my book Moderne Algebra*, « Historia Mathematica », II (1975), pp. 31-40.

S. Vasilach, *Ensembles, Structures, Catégories, Faisceaux*, Québec, Les Presses de l' Université de Laval, 1977.

O. Veblen, *A System of Axiom for Geometry*, « Transactions of the American Mathematical Society », V (1904), pp. 343-384.

J. Vuillemin, *Préface* a H. Poincaré, *La Science et l' Hypothèse*, Parigi, Flammarion, 1968, pp. 7-19.

H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, « Annals of Mathematics », XXXVIII (1938), pp. 112-126.

A. WEIL, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Parigi, Hermann, A. S. I. 551, 1938;

— *L'avenir des Mathématiques* (in F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Marsiglia, Cahiers du Sud, 1948).

A. N. WHITEHEAD, *A Treatise of Universal Algebra*, Cambridge, at the University Press, 1898.

M. WINTER, *Caractères de l'algèbre moderne*, « Revue de Métaphysique et de Morale », XVIII (1910), pp. 491-529;

— *Les principes du calcul fonctionnel*, ivi, XXI (1913), pp. 462-510.

E. ZERMELO, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, « Mathematische Annalen », LXV (1908), pp. 261-281.

Stampato presso la Tipografia
Edit. Gualandi S.n.c. di Vicenza